Übungen zur Vorlesung Algebra I

Übungsblatt 6

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 24.11.2015
Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)
Sei K ein Körper und $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynom. Man betrachte nun die dazugehörige polynomielle Abbildung $\tilde{f} : K^n \to K$. Zeigen Sie:

- Ist K ein unendlicher Körper, so gilt $f = 0$ genau dann, wenn $\tilde{f} = 0$.
- Ist K ein endlicher Körper, so gibt es ein $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $f \neq 0$ aber $\tilde{f} = 0$.

Übung 2 (4 Punkte)
Sei K ein abzählbarer Körper. Zeigen Sie, dass ein algebraischer Abschluss von K auch abzählbar ist.

Übung 3 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass ein endlicher Körper nicht algebraisch abgeschlossen sein kann.

Übung 4 (4 Punkte)(Artin-Schreier Erweiterungen in Charakteristik p)
Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\wp(x) = x^p - x$

$$\wp = \mathrm{Frob} - \mathrm{id} : K \to K$$

ist ein Gruppenhomomorphismus der additiven Gruppe.

(b) $\wp(x) = \wp(x + 1)$

(c) Wenn $a \notin \wp(K)$, dann ist $T^p - T - a \in K[T]$ irreduzibel.

(d) Sei weiter $a \notin \wp(K)$ und $K(\alpha)/K$ die Adjunktion einer Nullstelle α von $T^p - T - a$. Dann ist $K(\alpha)$ der Zerfällungskörper von $T^p - T - a$.

(e) Bestimmen Sie $G = \mathrm{Aut}_K(K(\alpha))$ und bestimmen Sie den Fixkörper von $K(\alpha)$ unter G.

Präsenzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 5
Machen Sie sich klar, was exakte Folgen von K-Vektorräumen sind und wie sie mit Injektivität und Surjektivität von Morphismen und der Dimensionsformel zusammenhängen.

Zusatzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 6
Sei $\mu : \mathbb{N} \to \{\pm 1\}$ die Möbius-Funktion, definiert als

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r & \text{falls } n = p_1 \cdot \dots \cdot p_r \text{ mit paarweise verschiedenen Primzahlen } p_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

und sei $f : \mathbb{N} \to R$ eine Funktion mit Werten in einem Ring R. Zeigen Sie: wenn

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)\,,$$

dann gilt die Möbius-Inversionsformel

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F(n/d)\,.$$

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr** am **Montag, den 30.11.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.