Skript zur Vorlesung

Nicht-archimedische Geometrie

Wintersemester 2014/2015

Prof. Dr. Annette Werner

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation

Differenzierbare Funktionen über den reellen Zahlen als Grundwerkzeug der Mathematik und Naturwissenschaften kennen wir seit der Schulzeit. Über den komplexen Zahlen studiert man in der Analysis die holomorphen Funktionen. Auf reellen oder komplexen Mannigfaltigkeiten (also geometrischen Objekten, die lokal so aussehen wie ein offener Teil des $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$) kann man durch Verkleben differenzierbare bzw. holomorphe Funktionen einführen. Solche analytischen Methoden sind ein überaus leistungsstarkes Werkzeug für geometrische Fragen.

Was passiert, wenn wir statt $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ einen anderen Grundkörper K betrachten? Zunächst müssen wir diesen mit einem Betrag ausstatten, und es ist zudem sinnvoll, anzunehmen, dass K bezüglich dieses Betrags vollständig ist. Das bedeutet, dass jede Cauchyfolge in K gegen einen Grenzwert in K konvergiert. Nun betrachten wir das sogenannte archimedische Axiom: Für alle x, y in K mit $x \neq 0$ existiert eine natürliche Zahl n mit $\mid nx \mid > \mid y \mid$.

Man kann zeigen, dass $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ die einzigen vollständigen Körper sind, die das archimedische Axiom erfüllen. Daher interessieren wir uns hier nur für die sogenannten nicht-archimedischen Körper, in denen das archimedische Axiom nicht gilt. Wir werden sehen, dass in diesem Fall einige überraschende topologische Phänomene auftreten. So sind etwa in einem nicht-archimedischen Körper zwei Intervalle entweder disjunkt oder ineinander enthalten. Daher können wir bei der Entwicklung analytischer Methoden auch nicht genauso vorgehen wie im reellen oder komplexen Fall. Das Ziel dieser Vorlesung ist die Einführung und das Studium nicht-archimedischer analytischer Räume nach Vladimir Berkovich. Hierbei handelt es sich um eine vergleichsweise neue Theorie, die Berkovich in seiner 1990 erschienenen Monographie [Ber1] vorgestellt und dann in einer Reihe von Forschungsarbeiten weiterentwickelt hat. Als Übersichtsartikel seien auch [Con] und [Duc] sowie [Tem] empfohlen. Grundlagen über nicht-archimedische Körper und Algebren findet man in [Con], [Rob] und [BGR].

2 Nicht-archimedische Körper

Wir beginnen mit der Definition eines Betrages auf einem Körper K.

Definition 2.1 *Eine Funktion* $|\ .\ |: K \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$ *heißt Absolutbetrag (oder einfach Betrag) auf* K*, falls für alle* $a, b \in K$ *die folgenden Bedingungen gelten:*

i) $|\ a\ | = 0$ *genau dann, wenn* $a = 0$.

ii) $|\ ab\ | = |\ a\ |\ |\ b\ |$.

iii) $|\ a + b\ | \leqq |\ a\ | + |\ b\ |$ *(Dreiecksungleichung).*

Ein Absolutbetrag $|\ .\ |$ auf K definiert eine natürliche Topologie auf K: Eine Menge $U \subset K$ ist offen genau dann, wenn es für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$\{y \in K : |\ x - y\ | < \varepsilon\} \subset U$$

ist.

Offene Teilmengen enthalten also mit jedem Punkt auch einen kleinen offenen Ball um den Punkt.

Für den reellen Absolutbetrag ergibt sich so die bekannte Topologie auf den reellen Zahlen.

Ein Betrag $|\ .\ |$ heißt archimedisch, falls er das archimedische Axiom erfüllt, ansonsten heißt er nicht-archimedisch. Wie in der Einführung erwähnt, lautet dieses Axiom wie folgt:

Definition 2.2 *(Archimedisches Axiom) Für alle* $x, y \in K$ *mit* $x \neq 0$ *gibt es eine natürliche Zahl* n *mit* $|\ nx\ | > |\ y\ |$ *. Hier ist* nx *definiert als* $nx = \underbrace{x + \cdots + x}_{n-\text{mal}}$.

Übungsaufgabe 1 *Ein Betrag* $|\ .\ |$ *auf* K *ist genau dann nicht-archimedisch, wenn* $|\ n \cdot 1\ | \leqq 1$ *für alle natürlichen Zahlen* n.

Definition 2.3 *Ein Betrag* $|\ .\ |$ *auf einem Körper* K *erfüllt die nicht-archimedische (oder starke) Dreiecksungleichung, falls für alle* $x, y \in K$ *gilt*

$$|\ x + y\ | \leqq max\{|\ x\ |, |\ y\ |\}.$$

Satz 2.4 *Ein Betrag* $|\ .\ |$ *auf* K *ist genau dann nicht-archimedisch, wenn er die nicht-archimedische Dreiecksungleichung erfüllt.*

Beweis : Siehe [Wer], Beweis von Satz 2.6. □

Für einen nicht-archimedisch bewerteten Körper können wir also die Dreiecksungleichung iii) aus Definition 2.1 durch die starke Dreiecksungleichung aus Definition 2.3 ersetzen.

Das führt zu folgender wichtigen Eigenschaft.

Satz 2.5 *Es sei $|\ .\ |$ ein nicht-archimedischer Betrag auf K. Für $x, y \in K$ mit $|\ x\ | \neq |\ y\ |$ gilt*

$$|\ x + y\ | = \max\{|\ x\ |, |\ y\ |\}.$$

Beweis : Ohne Einschränkung ist $|\ x\ | < |\ y\ |$. Die nicht-archimedische Dreiecksungleichung liefert

$$|\ y\ | = |\ (x+y) - (y)\ | \leqq \max\{|\ x+y\ |, |\ x\ |\}$$

Wegen $|\ x\ | < |\ y\ |$ muss das Maximum in $|\ x + y\ |$ angenommen werden und es gilt $|\ y\ | \leqq |\ x + y\ |$. Da andererseits $|\ x + y\ | \leqq \max\{|\ x\ |, |\ y\ |\} = |\ y\ |$ ist, folgt die Behauptung. □

Übungsaufgabe 2 *Überlegen Sie sich, wieso man Satz 2.5 so formulieren kann: In jedem nicht-archimedischen Dreieck haben mindestens zwei Seiten die gleiche Länge.*

Beispiel 1:

1) Sei p eine Primzahl. Der $p-$adische Absolutbetrag $|\ .\ |_p$ auf $\mathbb{Q}$ ist folgendermaßen definiert: Für $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$ sei

$$\left|\frac{m}{n}\right|_p = \begin{cases} 0 & m = 0 \\ p^{-v_p(m)+v_p(n)} & m \neq 0, \end{cases}$$

wobei $v_p(m)$ der Exponent von p in der Primfaktorzerlegung von m ist. Es gilt also $m = p^{v_p(m)}k$ mit einer ganzen Zahl k, die teilerfremd zu p ist.

2) Jeder Körper K kann mit dem trivialen Absolutbetrag

$$|\ x\ | = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

ausgestattet werden.

3) Sei k ein beliebiger Körper. Für ein Polynom $0 \neq f = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n T^n \in K[T]$ definieren wir die Nullstellenordnung $\mathrm{ord}(f) = \min\{k : a_k \neq 0\}$. Dann ist

$$\left| \frac{f}{g} \right| = \begin{cases} 0 & , f = 0 \\ e^{-\mathrm{ord}(f)+\mathrm{ord}(g)} & , f \neq 0 \end{cases}$$

ein nichtarchimedischer Betrag auf dem rationalen Funktionenkörper $k(T) = \mathrm{Quot}\, k[T]$.

Übungsaufgabe 3 *Überzeugen Sie sich, dass alle drei Beispiele wirklich nicht-archimedische Beträge liefern.*

Übungsaufgabe 4 *Recherchieren Sie den Satz von Ostrowski, der besagt, dass es (bis auf Äquivalenz) auf dem Körper $\mathbb{Q}$ nur den trivialen Betrag, den reellen Absolutbetrag und die $p-$adischen Absolutbeträge für alle Primzahlen p gibt. Suchen Sie auch einen Beweis für die Tatsache, dass $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ die einzigen vollständigen archimedischen Körper sind.*

Übungsaufgabe 5 *Recherchieren Sie den Körper der formalen Laurentreihen und den Körper der Puiseuxreihen.*

Übungsaufgabe 6 *Ist K ein Körper der Charakteristik $p > 0$, so ist jeder Betrag auf K nicht-archimedisch.*

Im folgenden nennen wir einen Körper K zusammen mit einem nicht-archimedischen Absolutbetrag auf K einfach einen nicht-archimedischen Körper.

Definition 2.6 *Wir nennen zwei Absolutbeträge $|\cdot|_1$ und $|\cdot|_2$ auf einem Körper K äquivalent, falls jede Teilmenge von K, die offen bezüglich $|\cdot|_1$ ist, auch offen bezüglich $|\cdot|_2$ ist und umgekehrt.*

Lemma 2.7 *Es seien $|\cdot|_1$ und $|\cdot|_2$ zwei Absolutbeträge auf dem Körper K. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent*

i) $|\cdot|_1$ und $|\cdot|_2$ sind äquivalente Beträge.

ii) Für jedes $x \in K$ gilt

$$|x|_1 < 1 \Leftrightarrow |x|_2 < 1.$$

iii) Es gibt eine positive reelle Zahl α mit

$$|x|_1 = |x|_2^{\alpha}$$

für alle $x \in K$.

Beweis : $i) \Rightarrow ii)$: Sei $x \in K$ mit $|x|_1 < 1$. Dann ist $|x|_1^n$ für $n \to \infty$ eine Nullfolge. Jede offene Umgebung von 0 bezüglich der $|\cdot|_1$-Topologie enthält also fast alle x^n $(n \in \mathbb{N})$. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist die Menge

$$\{y \in K : |y|_2 < \varepsilon\}$$

offen in der von $|\cdot|_2$ definierten Topologie, also nach Voraussetzung auch in der von $|\cdot|_1$ definierten Topologie. Damit enthält sie fast alle Folgenglieder x^n. Daher ist $(x^n)_{n \geqq 1}$ eine Nullfolge bezüglich $|\cdot|_2$, also konvergiert

$$|x|_2^n = |x^n|_2$$

gegen 0. Somit ist $|x|_2 < 1$.
Mit demselben Argument zeigt man, dass $|x|_2 < 1$ die Ungleichung $|x|_1 < 1$ impliziert.

$ii) \Rightarrow iii)$: Ist $|\cdot|_1$ der triviale Absolutbetrag, so muss auch $|\cdot|_2$ der triviale Absolutbetrag sein (Übungsaufgabe). In diesem Fall ist $iii)$ mit $\alpha = 1$ erfüllt.
Wir können also annehmen, dass $|\cdot|_1$ nicht der triviale Absolutbetrag ist. Wir wählen ein $x \in K$ mit $x \neq 0$ und $|x|_1 < 1$. Dann ist auch $|x|_2 < 1$ und wir setzen

$$\alpha = \frac{\log |x|_1}{\log |x|_2} \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Es folgt $|x|_2^\alpha = |x|_1$.
Sei nun $y \in K \setminus \{0\}$. Falls $|y|_1 = 1$ ist, so kann nach Voraussetzung weder $|y|_2$ noch $|1/y|_2$ echt kleiner als 1 sein. Also folgt $|y|_2 = 1$. Somit gilt für das oben definierte α trivialerweise

$$|y|_2^\alpha = |y|_1 .$$

Falls $|y|_1 < 1$ ist, so ist nach Voraussetzung auch $|y|_2 < 1$.
Also ist $\log |y|_1 \neq 0$ und $\log |y|_2 \neq 0$. Wir betrachten die beiden reellen Zahlen

$$\frac{\log |x|_1}{\log |y|_1} \text{ und } \frac{\log |x|_2}{\log |y|_2}.$$

Beide sind das Supremum aller echt kleineren rationalen Zahlen. Gilt nun für $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $m \neq 0$

$$\frac{n}{m} < \frac{\log |x|_1}{\log |y|_1},$$

so folgt $n \log |y|_1 > m \log |x|_1$, da $\log |y|_1 < 0$ ist.
Also ist $\log |y^n|_1 > \log |x^m|_1$, woraus

$$\left| \frac{x^m}{y^n} \right|_1 < 1$$

folgt. Nach Voraussetzung ist dann auch

$$\left| \frac{x^m}{y^n} \right|_2 < 1,$$

woraus wir $|x^m|_2 < |y^n|_2$, also auch $m \log |x|_2 < n \log |y|_2$ und damit

$$\frac{n}{m} < \frac{\log |x|_2}{\log |y|_2}$$

schließen. Also folgt

$$\frac{\log |x|_1}{\log |y|_1} = \sup \left\{ \frac{n}{m} : \frac{n}{m} < \frac{\log |x|_1}{\log |y|_1} \right\} \leqq \frac{\log |x|_2}{\log |y|_2}.$$

Dasselbe Argument mit vertauschten Rollen zeigt

$$\frac{\log |x|_2}{\log |y|_2} \leqq \frac{\log |x|_1}{\log |y|_1},$$

also folgt

$$\frac{\log |x|_2}{\log |y|_2} = \frac{\log |x|_1}{\log |y|_1}.$$

Daher ist

$$\alpha = \frac{\log |x|_1}{\log |x|_2} = \frac{\log |y|_1}{\log |y|_2}$$

und somit $|y|_1 = |y|_2^\alpha$.
Starten wir mit einem y mit $|y| > 1$, so folgt

$$\left| \frac{1}{y} \right|_1 = \left| \frac{1}{y} \right|_2^\alpha,$$

also ebenfalls $|y|_1 = |y|_2^\alpha$. Damit ist $iii)$ bewiesen.

$iii) \Rightarrow i)$: Gilt $|x|_1 = |x|_2^\alpha$ für alle $x \in K$, so schließen wir

$$|x - a|_1 < r \Leftrightarrow |x - a|_2 = |x - a|_1^\alpha < r^\alpha.$$

Ist U eine offene Teilmenge in K bezüglich $|\cdot|_1$, so enthält U mit jedem Punkt a noch einen offenen Ball

$$B(a, r) = \{x \in K : |x - a|_1 < r\}.$$

Da $B(a, r) = \{x \in K : |x - a|_2 < r^\alpha\}$ ist, enthält U mit jedem Punkt a auch einen Ball bezüglich $|\cdot|_2$, ist also offen bezüglich $|\cdot|_2$. Die andere Richtung zeigt man analog.

□

Definition 2.8 *Ein nicht-archimedischer Absolutbetrag auf K heißt diskret, falls die Wertmenge*

$$| K^* | = \{| a | : a \in K, a \neq 0\}$$

eine diskrete Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Das heißt, dass es für jedes Element $x \in | K^* |$ eine offene Umgebung in $\mathbb{R}$ gibt, die keine anderen Elemente aus $| K^* |$ enthält.

Übungsaufgabe 7 *Recherchieren Sie diskrete Bewertungen und diskrete Bewertungsringe und überlegen Sie, was diese mit diskreten Absolutbeträgen zu tun haben.*

Lemma 2.9 *Jeder diskrete Absolutbetrag ist nicht-archimedisch.*

Beweis : Ist die Charakteristik von K positiv, so folgt die Behauptung aus der Tatsache, dass ein endlicher Körper nur den trivialen Betrag zulässt. Im Fall char $K = 0$ folgt sie aus dem Satz von Ostrowski. □

Beispiel 2: Die Beträge in Beispiel 1 sind alle diskret.

Definition 2.10

i) *Eine Folge $(a_n)_{n \geqq 1}$ mit $a_n \in K$ heißt Cauchyfolge, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt mit*

$$| a_m - a_n | < \varepsilon$$

für alle $m, n \geqq N$.

ii) *Eine Folge $(a_n)_{n \geqq 1}$ aus K konvergiert gegen $a \in K$, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_o gibt mit*

$$| a - a_n | < \varepsilon$$

für alle $n \geqq n_0$.

iii) *K heißt vollständig bezüglich $| \ |$, falls jede Cauchyfolge aus K gegen einen Grenzwert in K konvergiert.*

Beispiel 3:

i) $\mathbb{R}$ ist vollständig bezüglich des reellen Absolutbetrages.

ii) Jeder Körper ist vollständig bezüglich des trivialen Absolutbetrages.

iii) $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig bezüglich des $p-$adischen Absolutbetrages, siehe [Wer], Kapitel 6.

Einen nicht-vollständigen Körper kann man komplettieren. Dies kennen wir aus der Analysis, in der durch Komplettierung von $\mathbb{Q}$ nach dem reellen Absolutbetrag die reellen Zahlen konstruiert werden. Analog können wir für beliebige Beträge vorgehen.

Satz 2.11 *Es sei K ein Körper mit einem Absolutbetrag $|\ |$. Mit $\mathcal{C}$ bezeichnen wir die Menge aller Cauchyfolgen bezüglich $|\ |$ in K und mit $\mathcal{N}$ die Menge aller Nullfolgen. Dann ist $\mathcal{C}$ ein kommutativer Ring mit 1, und $\mathcal{N} \subset \mathcal{C}$ ist ein Ideal. Der Quotientenring*

$$\hat{K} := \mathcal{C}/\mathcal{N}$$

ist ein Körper.

Wir können K in $\hat{K}$ einbetten, indem wir jedes $a \in K$ auf die zugehörige konstante Folge abbilden. Der Betrag auf K lässt sich auf eindeutige Weise zu einem Betrag auf $\hat{K}$ fortsetzen, der $\hat{K}$ zu einem vollständigen Körper macht. Wir nennen $\hat{K}$ die Komplettierung von K.

Beweis : [Wer], Kapitel 6. □

Lemma 2.12

i) Ist K vollständig, dann ist $K = \hat{K}$.

ii) K ist dicht in $\hat{K}$, jede offene Teilmenge in $\hat{K}$ enthält also ein Element aus K.

iii) Ist $|\ |$ ein nicht-archimedischer Betrag auf K, so hat der zugehörige Betrag auf $\hat{K}$ dieselbe Wertemenge. Mit anderen Worten, es gilt $| K^* | = | \hat{K}^* |$.

Beweis : Übungsaufgabe. □

Beispiel 4: Die Komplettierung von $\mathbb{Q}$ nach dem $p-$adischen Betrag $|\ |_p$ ist der Körper $\mathbb{Q}_p$. Falls Sie ihn noch nicht kennen, dann recherchieren Sie ein bisschen! Was ist die Komplettierung von $k(T)$ aus Beispiel 1, 3) ?

Satz 2.13 *Ist K ein algebraisch abgeschlossener nicht-archimedischer Körper, dann ist auch die Komplettierung $\hat{K}$ algebraisch abgeschlossen.*

Beweis : In den Übungen. □

Definition 2.14 *Es sei $\mathbb{C}_p = (\overline{\mathbb{Q}_p})^\wedge$ die Komplettierung des algebraischen Abschlusses von $\mathbb{Q}_p$.*

$\mathbb{C}_p$ ist ein vollständiger und algebraisch abgeschlossener Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}_p$. Der algebraische Abschluss $\overline{\mathbb{Q}_p}$ ist nicht vollständig, daher ist hier ein weiterer Schritt erforderlich.

$\mathbb{C}_p$ ist ein $p-$adisches Analogon der komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \overline{\mathbb{R}}$, die ein vollständiger und algebraisch abgeschlossener Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$ sind.

Satz 2.15 *Es sei K ein Körper mit einem nicht-archimedischen Betrag $|\ |$. Für jede endliche Körpererweiterung L/K lässt sich dieser zu einem nicht-archimedischen Betrag $|\ |_L$ auf L fortsetzen. Ist K vollständig, so gibt es genau eine Betragsfortsetzung auf L.*

Beweis : Hier brauchen wir ein bisschen Algebra. Als Körpererweiterung ist L ein Vektorraum über K. Mit $n = [L : K]$ bezeichnen wir seine Dimension. Für jedes $\alpha \in L$ ist die Multiplikationsabbildung

$$\begin{array}{rcl} f_\alpha : L & \longrightarrow & L \\ x & \longmapsto & \alpha x \end{array}$$

eine lineare Abbildung. Wir definieren die Norm von α als

$$\mathcal{N}_{L/K}(\alpha) = \det(f_\alpha) \in K,$$

wobei $\det(f_\alpha)$ die Determinante einer Koordinatenmatrix bezüglich einer beliebigen $K-$Basis von L ist.

Aus dieser Definition folgt $\mathcal{N}_{L/K}(\alpha) = \alpha^n$ für alle $\alpha \in K$ und $\mathcal{N}_{L/K}(\alpha\beta) = \mathcal{N}_{L/K}(\alpha)\mathcal{N}_{L/K}(\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in L$.

Nun definieren wir einen Betrag auf L durch

$$|\ \alpha\ |_L = |\ \mathcal{N}_{L/K}(\alpha)\ |^{\frac{1}{n}}\ .$$

Diese Funktion setzt den gegebenen Betrag $|\ |$ auf K fort und erfüllt i) und ii) aus Definition 2.1.

Wir müssen noch die Dreiecksungleichung zeigen. Wir zeigen sie direkt in der starken Form 2.3, also in der Form

$$|\ x + y\ |_L \leqq \max\{|\ x\ |_L, |\ y\ |_L\}.$$

Indem wir durch y teilen (ohne Einschränkung ist $y \neq 0$), genügt es

$$|\ x + 1\ |_L \leqq \max\{|\ x\ |_L, 1\}$$

zu zeigen. Das folgt aus

$$| \alpha |_L \leqq 1 \Rightarrow | \alpha - 1 |_L \leqq 1, \text{ für alle } \alpha \in L,$$

wie man sich leicht überzeugt (Übungsaufgabe).

Definitionsgemäß ist $| \alpha |_L = 1$ genau dann, wenn $| \mathcal{N}_{L/K}(\alpha) | \leqq 1$, also müssen wir zeigen

$$| \mathcal{N}_{L/K}(\alpha) | \leqq 1 \Rightarrow | \mathcal{N}_{L/K}(\alpha - 1) | \leqq 1.$$

Wir bezeichnen mit $K(\alpha)/K$ die kleinste in L enthaltene Körpererweiterung, die α enthält. Dann ist $g_\alpha = f_\alpha |_{K(\alpha)}$ ein $K-$Endomorphismus des Vektorraums $K(\alpha)$. Ist $s = [K(\alpha) : K]$ die Dimension von $K(\alpha)/K$, so hat das charakteristische Polynom $\chi_{g_\alpha}(X) = X^s + a_{s-1}X^{s-1} + \ldots + a_0 \in K[X]$ den Grad s. Sein Absolutkoeffizient a_0 ist gleich $\pm$ der Determinante von g_α. Man überlegt sich mit Hilfe einer Basis von L/K, die man aus einer Basis von $K(\alpha)/K$ und einer von $L/K(\alpha)$ bastelt, dass

$$(\det g_\alpha)^{[L:K(\alpha)]} = \mathcal{N}_{L/K}(\alpha)$$

gilt.

Also ist $| \mathcal{N}_{L/K}(\alpha) | \leqq 1$ genau dann, wenn $| a_0 | \leqq 1$ ist.

Nun ist $g_{\alpha-1} = g_\alpha - \mathrm{id}$, also

$$\begin{aligned}\chi_{g_{\alpha-1}}(X) &= \chi_{g_\alpha}(X+1) \\ &= X^s + (a_{s-1} + s)X^{s-1} + \ldots + (1 + a_{s-1} + \ldots + a_1 + a_0),\end{aligned}$$

Aus der Tatsache, dass $K(\alpha)$ der kleinste Körper in L ist, der α enthält, folgt, dass χ_{g_α} irreduzibel ist. Jetzt brauchen wir das unten ausgeführte Lemma 2.16:

Angenommen $| \mathcal{N}_{L/K}(\alpha) | \leqq 1$. Dann folgt mit Lemma 2.16 $| a_i | \leqq 1$ für alle Koeffizienten von $\chi_{g_\alpha}(X) = X^s + a_{s-1}X^{s-1} + \ldots + a_1X + a_0$. Daher ist auch der Absolutkoeffizient von $\chi_{g_{\alpha-1}}(X)$ betragsmäßig $\leqq 1$, woraus $| \mathcal{N}_{L/K}(\alpha - 1) | \leqq 1$ folgt.

Damit haben wir die Existenz einer nicht-archimedischen Fortsetzung von $| \ |$ auf L gezeigt. Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen, falls K vollständig ist. Angenommen, $| \ |_1$ und $| \ |_2$ sind zwei Fortsetzungen des Betrages auf L. Dann sind beide auch $K-$Normen auf dem Vektorraum V. Nach Lemma 2.17 gilt also für geeignete positive reelle Konstanten a und b und alle $x \in L$

$$a | x |_1 \leqq | x |_2 \leqq b | x |_1 .$$

Dann sind $| \ |_1$ und $| \ |_2$ äquivalent (Übungsaufgabe) und aus Lemma 2.7 folgt $| x |_1 = | x |_2^\alpha$ für ein $\alpha > 0$. Indem wir hier $x \in K$ einsetzen, folgt $\alpha = 1$, also $\| \ \|_1 = \| \ \|_2$. □

Lemma 2.16 *Sei $f(X) = X^s + a_{s-1}X^{s-1} + \ldots + a_1X + a_0$ ein irreduzibles normiertes Polynom mit Koeffizienten $a_i \in K$. Ist dann $\mid a_0 \mid \leqq 1$, so sind alle $\mid a_i \mid \leqq 1$.*

Beweis : In den Übungen. □

Lemma 2.17 *Es sei V ein endlich-dimensionaler $K-$Vektorraum über einem vollständigen Körper K. Es seien $| \ |_1$ und $| \ |_2$ zwei $K-$Normen auf V, das heißt, es gilt für $i = 1, 2$*

i) $\| v \|_i = 0 \Leftrightarrow v = 0$

ii) $\| av \|_i = \mid a \mid \| v \|_i$ *für alle* $a \in K, v \in V$

iii) $\| v + w \|_i \leqq \| v_i \|_i + \| w \|_i$ *für alle* $v, w \in K$.

Dann gibt es reelle Konstanten $a > 0$ und $b > 0$ mit

$$a \| v \|_2 \leqq \| v \|_1 \leqq b \| v \|_2$$

für alle $v \in V$. Ferner ist V vollständig bezüglich jeder $K-$Norm.

Beweis : Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine $K-$Basis von V. Dann trägt V die Maximumsnorm $\| \ \|_{\max}$ bezüglich $v_1, \ldots, v_n$. Diese ist definiert als

$$\| a_1v_1 + \ldots + a_nv_n \|_{\max} = \max\{\mid a_1 \mid, \ldots, \mid a_n \mid\}.$$

Im Beweis können wir o.E. annehmen, dass $\| \ \|_2 = \| \ \|_{\max}$ bezüglich einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ gilt (indem wir die Behauptung einmal auf $\| \ \|_1$ und $\| \ \|_{\max}$ und einmal auf $\| \ \|_2$ und $\| \ \|_{\max}$ anwenden). Wir schreiben der Einfachheit halber $\| \ \| = \| \ \|_2$ und führen Induktion nach $n = \dim_K V$.

Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Also sei $n > 1$. Wir betrachten $v = a_1v_1 + \ldots + a_nv \in V$. Dann ist

$$\| v \| \leqq \mid a_1 \mid \| v_1 \| + \ldots + \mid a_n \mid \| v_n \|,$$

also folgt $\| v \| \leqq b \| v \|_{\max}$ für $b = \| v_1 \| + \ldots + \| v_n \|$.

Für die andere Abschätzung betrachten wir für alle $1 \leqq i \leqq n$ den $(n-1)$-dimensionalen Unterraum

$$U_i = \langle \{v_j : j \neq i\} \rangle$$

Auf U_i mit den eingeschränkten Normen gilt nach Induktionsvoraussetzung unsere Behauptung.

Wir betrachten die Teilmenge

$$v_i + U_i = \{v_i + u : u \in U_i\}.$$

Angenommen, es gibt eine Folge von Vektoren $(w_n)_{n \geqq 1}$ in $v_i + U_i$ mit $\| w_n \| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Dann konvergiert $(w_n - v_i)_{n \geqq 1}$ gegen $-v_i$. Die Folge $(w_n - v_i)_{n \geqq 1}$ ist also eine Cauchyfolge in U_i. Nach Induktionsvoraussetzung ist U_i vollständig, also konvergiert $(w_n - v_i)n \geqq 1$ gegen ein Element in U_i. Das liefert einen Widerspruch zu $v_i \notin U_i$. Also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\| w \| \geqq \varepsilon$$

für alle $w \in v_i + U_i$.

Sei $v = a_i v_1 + \ldots + a_n v_n \in V$ beliebig mit $\| v \|_{\max} = | a_i | \neq 0$ für ein $1 \leqq i \leqq n$. Dann ist $a_i^{-1} v \in v_i + U_i$ und somit $\| a_i^{-1} v \| \geqq \varepsilon$. Daraus folgt $\| v \| \geqq | a_i | \varepsilon = \| v \|_{\max} \varepsilon$. Für $a = \varepsilon$ gilt also unsere Behauptung. □

Die Aussage von Lemma 2.17 kann man auch so formulieren:

Je zwei Normen auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum über einem vollständigen Körper sind äquivalent.

Lemma 2.18 *i) Ist der Betrag auf K trivial, dann ist auch die oben beschriebene Fortsetzung auf eine endliche Körpererweiterung trivial.*

ii) Ist der Betrag auf K diskret, dann ist auch die oben beschriebene Fortsetzung auf eine endliche Körpererweiterung diskret.

iii) Ist K nicht-archimedisch und vollständig, so ist auch jede endliche Erweiterung vollständig.

Beweis : Übungsaufgabe. □

Ist K ein vollständiger nicht-archimedischer Körper, so kann man den Betrag auf K zu einem Betrag auf den algebraischen Abschluss $\overline{K} = \bigcup_{L/K \text{ endlich}} L$ fortsetzen. Wegen der Eindeutigkeitsaussage in Satz 2.13 ist dies wohldefiniert (also unabhängig von der Wahl einer Erweiterung, die ein gegebenes Element enthält). Lemma 2.18 ii) und iii) sind im allgemeinen nicht mehr richtig, wenn man von K auf $\overline{K}$ übergeht.

Übungsaufgabe 8 *Überlegen Sie sich das am Beispiel von $\mathbb{Q}_p$ oder schlagen Sie es in der Literatur nach.*

Lemma 2.19 *Sei K ein nicht-archimedischer Körper. Dann ist der „abgeschlossene Einheitsball“*

$$R_K = \{x \in K : | x | \leqq 1\}$$

ein Unterring von K. Der „offene Einheitsball“

$$\mathcal{M}_K = \{x \in K : | x | < 1\}$$

ist ein maximales Ideal in R_K. Der Quotient $\kappa_K = R_K/\mathcal{M}_K$ ist also ein Körper. Er heißt Restklassenkörper von K.

Beweis : Übungsaufgabe (siehe etwa [Wer], Kapitel 4). □

Wir nennen eine Körpererweiterung L/K eine nicht-archimedische Körpererweiterung, falls K und L jeweils einen nicht-archimedischen Betrag tragen, so dass der Betrag von L denjenigen auf K fortsetzt. Ist L/K eine nicht-archimedische Körpererweiterung, so ist definitionsgemäß $R_K \subset R_L$ und $\mathcal{M}_K = \mathcal{M}_L \cap R_K$. Also ist $\kappa_K \subset \kappa_L$, das heißt κ_L/κ_K ist eine Körpererweiterung. Außerdem ist

$$| K^* | \subset | L^* |$$

eine Untergruppe.

Übungsaufgabe 9 *Ist L/K eine endliche Körpererweiterung, so ist κ_L/κ_K eine endliche Körpererweiterung. Ferner ist $| K^* | \subset | L^* |$ eine Untergruppe von endlichem Index. Es sei f der Körpergrad $[\kappa_L : \kappa_K]$ und e der Index von $| K^* |$ in $| L^* |$. Dann gilt*

$$[L : K] \geqq ef.$$

Falls der Betrag auf K diskret ist, so gilt sogar

$$[L : K] = ef.$$

Definition 2.20 *Sei K ein nicht-archimedischer Körper. Für jedes $a \in K$ und $r \in \mathbb{R}$ sei $d(a, r) = \{x \in K : | x - a | \leqq r\}$ der abgeschlossene Ball mit Radius r um a und*

$$D^0(a, r) = \{x \in K : | x - a | < r\}$$

der offene Ball mit Radius r um a.

Übungsaufgabe 10 *Überlegen Sie sich, dass $D(a, r)$ abgeschlossen und dass $D^0(a, r)$ offen ist.*

Verblüffenderweise sind im nicht-archimedischen Fall Bälle immer offen und abgeschlossen.

Satz 2.21 *Für $a \in K$ und $r \in \mathbb{R}$ ist der abgeschlossene Ball $D(a, r)$ sowie der Kreisrand*

$$\{x \in K : \mid x - a \mid = r\}$$

offen.

Der offene Ball $D^0(a, r)$ ist auch abgeschlossen.

Beweis : Es sei $a \in K$ und $r \in \mathbb{R}$. Ist b ein Element mit $\mid a - b \mid = r$, so gilt für jedes $c \in K$ in $D^0(b, r)$ die Bedingung $\mid b - c \mid < r$.

Mit der starken Dreiecksungleichung folgt also aus Satz 2.5

$$\begin{aligned} \mid a - c \mid &= \mid (a - b) + (b - c) \mid \\ &= \max\{\mid a - b \mid, \mid b - c \mid\} = r \end{aligned}$$

Somit folgt $D^0(b, r) \subset \{x \in K : \mid x - a \mid = r\}$, daher ist die Kreislinie offen.

Daraus folgt, dass $D(a, r)$ offen und $D^0(a, r)$ abgeschlossen ist. □

Übungsaufgabe 11 *Für alle $b \in D(a, r)$ ist $D(a, r) = D(b, r)$. Zwei nichtarchimedische Bälle sind also entweder disjunkt oder ineinander enthalten.*

Übungsaufgabe 12 *K ist ein total unzusammenhängender topologischer Raum.*

Definition 2.22 *Ein nicht-archimedischer Körper heißt sphärisch vollständig, falls jede Folge $\big(D(a_n, r_n)\big)_{n \geqq 1}$ abgeschlossene Bälle in K mit*

$$D(a_{n+1}, r_{n+1}) \subset D(a_n, r_n) \text{ für alle } n \geqq 1$$

einen nicht-leeren Schnitt hat.

Beispiel 5: Jeder diskret bewertete Körper ist sphärisch vollständig.

Man kann zeigen, dass jeder sphärisch vollständige Körper auch vollständig ist. Die Umkehrung gilt allerdings nicht!

Lemma 2.23 *$\mathbb{C}_p$ ist nicht sphärisch vollständig.*

Beweis : In den Übungen. □

3 Die Einheitskreisscheibe

Bevor wir in die allgemeine Theorie einsteigen, wollen wir zunächst das nicht-archimedische Analogon der komplexen Einheitskreisscheibe $E = \{z \in \mathbb{C} \mid z \mid_{\mathbb{C}} \leqq 1\}$ betrachten.

Sei K ein beliebiger nicht-archimedischer Körper. Das naive Analogon von E ist der abgeschlossene Ball

$$D(0,1) = \{x \in K :\mid x \mid \leqq 1\}$$

Dies ist allerdings topologisch kein nützlicher Raum, da die Topologie auf K total unzusammenhängend ist. Für die Entwicklung einer Theorie von analytischen Funktionen ist dieser naive Standpunkt auch nicht ausreichend, denn beispielsweise ist die Funktion $f : D(0,1) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \mid x \mid < 1 \\ 1 & , \mid x \mid = 1, \end{cases}$$

auf der offenen Teilmenge $D^0(0,1)$ und auf der offenen Teilmenge $\{x \in K :\mid x \mid = 1\}$ jeweils durch eine konstante (also insbesondere eine konvergente Potenzreihe) gegeben. Aber eine solche „Sprungfunktion" sollte trotzdem nicht analytisch sein.

Das erste Problem, also die schlechten topologischen Eigenschaften von $D(0,1)$ werden wir durch Hinzufügen zusätzlicher Punkte lösen. Das zweite Problem, also die geeignete Definition analytischer Funktionen, lässt sich durch zusätzliche Bedingungen an die zugrundeliegenden offenen Überdeckungen beheben. Auf diesen Punkt kommen wir später zurück.

Um das richtige Analogon der komplexen Einheitskreisscheibe zu definieren, brauchen wir folgende Funktionenalgebra. Wir nehmen im folgenden immer an, dass K ein nicht-archimedischer vollständiger Körper ist, der nicht trivial bewertet ist, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird.

Definition 3.1 *Wir definieren die Tate algebra in einer Variablen als*

$$T_1 = \Big\{ \sum_{n \geqq 0}^{\infty} a_n z^n : a_n \in K, \mid a_n \mid \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \Big\}$$

Die Elemente in T_1 sind also formale Potenzreihen über K, deren Koeffizienten bezüglich des nicht-archimedischen Betrages auf K gegen Null konvergieren.

Übungsaufgabe 13 *i) Es gilt $K[z] \subset T_1$.*

ii) T_1 ist zusammen mit der koeffizientenweisen Addition und der Multiplikation

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big) z^n$$

eine $K-$Algebra.

Lemma 3.2 *Eine unendliche Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n \in K$ konvergiert genau dann in K, wenn $| c_n | \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Beweis : Das folgt aus der starken Dreiecksgleichung, siehe [Wer], Lemma 9.1 □

Lemma 3.3 *Eine formale Potenzreihe $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Koeffizienten $a_n \in K$ liegt genau dann in T_1, wenn die Reihe $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in D(0,1)$ konvergiert.*

Beweis : $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert nach Lemma 3.2 genau dann, wenn $| a_n | x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ geht. Ist $f \in T_1$, so folgt das aus $| a_n | \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $| x | \leqq 1$. Umgekehrt können wir in eine auf ganz $D(0,1)$ konvergente Potenzreihe f den Wert $z = 1$ einsetzen und erhalten $f \in T_1$. □

Definition 3.4 *Für $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ aus T_1 definieren wir*

$$\| f \| = \max\{| a_n | : n \geqq 0\}.$$

Wir nennen $\| \,.\, \|$ die Gaußnorm auf T_1.

Übungsaufgabe 14 *$f \mapsto \| f \|$ ist eine nicht-archimedische Norm auf T_1, das heißt, es gilt*

i) $\| f \| = 0$ genau dann, wenn $f = 0$.

ii) $\| af \| = | a | \, \| f \|$ für alle $a \in K$ und $f \in T_1$.

iii) $\| f + g \| \leqq \max\{\| f \|, \| g \|\}$.

Lemma 3.5 *Die Gaußnorm auf T_1 ist multiplikativ, das heißt, es gilt*

$$\| fg \| = \| f \| \,.\, \| g \|$$

für alle $f, g \in T_1$.

Beweis : Sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Wir wählen n_0 minimal, so dass $\max\{\mid a_n \mid : n \geqq 0\} = \mid a_{n_0} \mid$ gilt und n_1 minimal, so dass $\max\{\mid b_n \mid : n \geqq 0\} = \mid b_{n_1} \mid$ gilt.

Also ist $\mid a_i \mid < \mid a_{n_0} \mid$ für alle $0 \leqq i < n_0$ und $\parallel f \parallel = \mid a_{n_0} \mid$ sowie $\mid b_i \mid < \mid b_{n_1} \mid$für alle $0 \leqq i < n_1$ und $\parallel g \parallel = \mid b_{n_1} \mid$. Nun betrachten wir $fg = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \Big) z^n$. Aus

$$\begin{aligned} \mid \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \mid \quad &\leqq \quad \max_{k=0,\ldots,n} \mid a_k \mid\mid b_{n-k} \mid \\ &\leqq \quad \parallel f \parallel \parallel g \parallel \end{aligned}$$

folgt $\parallel f\, g \parallel \leqq \parallel f \parallel \parallel g \parallel$.

Für jedes $k = 0, \ldots, n_0 + n_1$ gilt $k \leqq n_0$ oder $n_0 + n_1 - k \leqq n_1$. Ist $k < n_0$, so gilt $\mid a_k \mid < \parallel f \parallel$. Ist $n_0 + n_1 - k < n_1$, so gilt $\mid b_{n_0+n_1-k} \mid < \parallel g \parallel$. Also ist für $k < n_0$ oder $n_0 + n_1 - k < n_1$

$$\mid a_k \mid \mid b_{n_0+n_1-k} \mid < \parallel f \parallel \parallel g \parallel .$$

Andererseits ist

$$\mid a_{n_0} \mid \mid b_{n_1} \mid = \parallel f \parallel \parallel g \parallel,$$

woraus mit Satz 2.5

$$\mid \sum_{k=0}^{n_0+n_1} a_k b_{n_0+n_1-k} \mid = \parallel f \parallel \parallel g \parallel$$

und somit $\parallel f\, g \parallel = \parallel f \parallel \parallel g \parallel$ folgt. Die andere Ungleichung $\parallel fg \parallel \leqq \parallel f \parallel \parallel g \parallel$ folgt sofort aus der Definition. □

Definition 3.6 *Eine $K-$Algebra A zusammen mit einer $K-$Norm $\parallel\ \parallel: A \to \mathbb{R}$ auf A heißt Banachalgebra, falls gilt*

i) $\parallel f\, g \parallel \leqq \parallel f \parallel \parallel g \parallel$ *für alle $f, g \in A$. (Die Norm ist submultiplikativ.)*

ii) *A ist vollständig bezüglich $\parallel\ \parallel$, das heißt, jede Cauchyfolge in A konvergiert gegen ein Element in A.*

Übungsaufgabe 15 *Falls K vollständig ist, so ist T_1 eine Banachalgebra.*

Nun werden wir zeigen, dass die Gaussnorm auf T_1 mit der Supremusnorm auf $D(0, 1)$ übereinstimmt.

Lemma 3.7 *Es sei $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K. Wir setzen den Betrag $|\ |_K$ wie im 2. Kapitel auf $\overline{K}$ fort. Mit*

$$D_{\overline{K}}(0,1) = \{x \in \overline{K} : x \leqq 1\}$$

bezeichnen wir die Einheitskreisscheibe in $\overline{K}$. Offenbar gilt $D(0,1) \subset D_{\overline{K}}(0,1)$. Sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in T_1$. Dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in D_{\overline{K}}(0,1)$ gegen einen Grenzwert $f(x)$ in $\overline{K}$. Es gilt

$$\| f \| = \sup_{a \in D_{\overline{K}}(0,1)} | f(x) |$$

und das Supremum wird angenommen, das heißt, es gilt sogar

$$\| f \| = \max_{x \in D_{\overline{K}}(0,1)} | f(x) | \, .$$

Beweis : Für $x \in \overline{K}$ mit $| x | \leqq 1$ und $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in T_1$ so konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nach Lemma 3.3 gegen einen Grenzwert $f(x)$ in $\overline{K}$.

Aus der starken Dreiecksungleichung folgt $| f(x) | \leqq \max\limits_{n \geqq 0} | a_n x^n | \leqq \max\limits_{n \geqq 0} | a_n | = \| f \|$, also ist $\sup\limits_{x \in D_{\overline{K}}(0,1)} | f(x) | \leqq \| f \|$.

Für den Rest der Behauptung genügt es zu zeigen, dass

$$\| f \| \leqq \max_{x \in D_{\overline{K}}(0,1)} | f(x) |$$

ist. Dafür reicht es zu zeigen, dass es ein $x \in D_{\overline{K}}(0,1)$ gibt, für das $\| f \| = | f(x) |$ gilt. Für $f = 0$ ist das klar. Also können wir $f \neq 0$ annehmen. Nach Definition gibt es ein $b \in K^*$ mit $| b | = \| f \|$. Indem wir f durch $b^{-1} f$ ersetzen, können wir ohne Einschränkung annehmen, das $\| f \| = 1$ gilt. Damit sind alle Koeffizienten a_n von f im Ganzheitsring R_K (siehe Lemma 2.19). Wir bezeichnen die Quotientenabbildung

$$R_K \to R_K / \mathcal{M}_K = \kappa_K$$

in den Restklassenkörper mit $c \mapsto \tilde{c}$. Aus $| a_n | \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ folgt für fast alle n, dass $| a_n | < 1$ und somit $\widetilde{a_n} = 0$ gilt. Also ist

$$\tilde{f}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{a_n} z^n = \sum_{n=0}^{N} \widetilde{a_n} z^n$$

ein Polynom. Wegen $\| f \| = 1$ ist $\tilde{f} \neq 0$. Die Körpererweiterung $\overline{K}/K$ liefert eine Körpererweiterung $\kappa_{\overline{K}}/\kappa_K$ der Restklassenkörper. Der Restklassenkörper $\kappa_{\overline{K}}$ enthält unendlich viele Elemente (Übungsaufgabe), also gibt es nach dem Fundamentalsatz der Algebra mindestens ein Element $c \in \kappa_{\overline{K}}$ mit $\tilde{f}(c) \neq 0$. Dieses ist von der Form $c = \tilde{x}$ für ein $x \in R_{\overline{K}} = D_{\overline{K}}(0,1)$, und es gilt $f(x) = \tilde{f}(c) \neq 0$ (Übungsaufgabe). Daraus folgt $| f(x) |= 1 =\| f \|$. $\square$

Wir untersuchen jetzt weitere Normen auf T_1. Dazu nehmen wir an, dass K ein nicht-archimedischer, nicht trivial bewerteter, vollständiger und algebraisch abgeschlossener Körper ist. Sei $a \in D(0,1)$ und $r \in]0,1]$ eine reelle Zahl. Dann können wir analog zur Gauß-Norm die Supremumnorm

$$\zeta_{a,r}(f) = \sup_{x \in D(a,r)} | f(x) |$$

betrachten. Mit dieser Schreibweise ist $\zeta_{0,1}(f) =\| f \|$.

Übungsaufgabe 16 *$\zeta_{a,r}$ ist eine Norm auf T_1.*

Ist $r =| b |\in| K^* |$, so betrachten wir die bijektive Abbbildung

$$\begin{array}{ccc} D(a,r) & \longrightarrow & D(0,1) \\ x & \longmapsto & \frac{x-a}{b}. \end{array}$$

Die Umkehrabbildung ist durch $x \mapsto bx + a$ gegeben. Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in T_1$. Dann ist

$$\zeta_{a,r}(f) = \sup_{x \in D(a,r)} | f(x) |= \sup_{x \in D(0,1)} | f(bx+a) |$$

Wir berechnen $f(bx + a)$ als formale Potenzreihe:

$$\begin{aligned} f(bx+a) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (bx+a)^n \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} \tbinom{m+k}{k} a^k \Big) b^m x^m. \end{aligned}$$

Da $f \in T_1$ ist, ist $\left(a_{m+k}\binom{m+k}{k}a^k\right)_{k \geq 0}$ in K eine Nullfolge. Also konvergiert die unendliche Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} a_{m+k}\binom{m+k}{k}a^k = c_m \in K$. Somit ist

$$\begin{aligned} \zeta_{a,r}(f) &= \sup_{x \in D(0,1)} \sum_{m=0}^{\infty} c_m b^m x^m \\ &= \| \sum_{m=0}^{\infty} c_m b^m x^m \| \\ &= \max_{m \geq 0} \{ | c_m | \, | b |^m \}. \\ &= \max_{m \geq 0} \{ | c_m | \; r^m \}. \end{aligned}$$

Wenn wir $f(x)$ um $(x-a)$ entwickeln, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x) = f\big((x-a)+a\big) &= \sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k}\tbinom{m+k}{k}a^k\Big)(x-a)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m(x-a)^m \end{aligned}$$

Also ist $\zeta_{a,r}\big(\sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m(x-a)^m\big) = \max\limits_{m\geqq 0}\{\mid c_m \mid r^m\}$.

Ist $r \notin \mid K^* \mid$, so ist

$$\begin{aligned} \zeta_{a,r}(f) &= \sup_{x\in D(a,r)} \mid f(x) \mid \\ &= \sup_{s\in\mid K^*\mid, s<r} \zeta_{a,s}(f), \end{aligned}$$

woraus auch hier

$$\zeta_{a,r}\big(\sum_{m=0}^{\infty} c_m(x-a)^m\big) = \max_{m\geqq 0}\{\mid c_m \mid r^m\}$$

folgt.

Wir erhalten also folgendes Resultat:

Lemma 3.8 *Für $a \in D(0,1)$ und $r \in]0,1]$ ist $\zeta_{a,r}(f) = \sup\limits_{x\in D(a,r)} \mid f(x) \mid$ eine Norm auf T_1. Ist $f = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m(x-a)^m$, so gilt $\zeta_{a,r}(f) = \max\limits_{m\geqq 0}\{\mid c_m \mid r^m\}$.*

Fixieren wir a und lassen wir r gegen 0 gehen, so konvergiert für jedes $f \in T_1$ der Wert

$$\zeta_{a,r}(f) = \sup_{x\in D(a,r)} \mid f(x) \mid$$

gegen $\mid f(a) \mid$. Daher definieren wir für jedes $a \in K$

$$\zeta_{a,0}(f) = \mid f(a) \mid .$$

Dies ist keine Norm auf T_1, denn es gilt etwa

$$\zeta_{a,0}(x-a) = 0,$$

das erste Normenaxiom ist also verletzt.

Definition 3.9 *Es sei K ein Körper mit einem Betrag $\mid\ \mid$ und A eine $K-$Algebra. Eine Abbildung $\gamma : A \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$ heißt Seminorm auf A, falls gilt*

i) $\gamma(af) = \mid a \mid \gamma(f)$ für alle $a \in K, f \in A$

ii) $\gamma(f+g) \leqq \gamma(f)+\gamma(g)$ *für alle* $f, g \in A$

iii) $\gamma(fg) \leqq \gamma(f)\gamma(g)$ *für alle* $f, g \in A$*, das heißt,* γ *ist submultiplikativ.*

Eine Seminorm γ *auf* A *heißt multiplikativ, falls sogar gilt*

$$\gamma(fg) = \gamma(f)\gamma(g) \qquad \text{für alle } f, g \in A.$$

Ist A *eine Banachalgebra mit Banachnorm* $\| \quad \|$*, so heißt eine Seminorm* γ *auf* A *beschränkt, falls es ein* $C > 0$ *gibt mit*

$$\gamma(f) \leqq C \parallel f \parallel \quad \text{für alle } f \in A.$$

Übungsaufgabe 17 *Für jedes* $a \in D(0,1)$ *ist* $\zeta_{a,0}$ *eine beschränkte multiplikative Seminorm auf der Banachalgebra* T_1*. Für alle* $a \in D(0,1)$ *und* $r \in]0,1]$ *ist* $\zeta_{a,r}$ *eine beschränkte multiplikative Norm auf* T_1*.*

Lemma 3.10 *Sei* K *ein vollständiger nicht-archimedischer Körper und* A *eine* $K-$*Banachalgebra mit multiplikativer Banachnorm sowie* $\gamma : A \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$ *eine beschränkte multiplikative Seminorm. Dann gilt für alle* $f, g \in A$ *und* $a \in K$ *:*

i) $\gamma(f) \leqq \parallel f \parallel$

ii) Falls γ *nicht die Nullfunktion ist, gilt* $\gamma(a) = \mid a \mid$

iii) $\gamma(f+g) \leqq \max\{\gamma(f), \gamma(g)\}$*. Falls* $\gamma(f) \neq \gamma(g)$ *ist, so steht hier sogar " = ".*

Beweis :

i) Für alle $n \geqq 1$ gilt

$$\gamma(f)^n = \gamma(f^n) \leqq C \parallel f^n \parallel = C \parallel f \parallel^n,$$

da γ multiplikativ und beschränkt ist und die Banachnorm multiplikativ ist.

Also ist $\gamma(f) \leqq \sqrt[n]{C} \parallel f \parallel$. Für $n \to \infty$ folgt daraus $\gamma(f) \leqq \parallel f \parallel$.

ii) Da die Banachnorm multiplikativ ist, gilt $\parallel 1 \parallel = \parallel 1 \parallel^2$, also $\parallel 1 \parallel = 1$. Da γ nicht die Nullfunktion ist, folgt analog $\gamma(1) = 1$. Nach i) gilt $\gamma(a) \leqq \parallel a \parallel = \mid a \mid \parallel 1 \parallel = \mid a \mid$ für alle $a \in K$. Ist $a \neq 0$, so ist also auch $\gamma(a^{-1}) \leqq \mid a^{-1} \mid = \mid a \mid^{-1}$. Da γ multiplikativ ist, gilt

$$1 = \gamma(1) = \gamma(aa^{-1}) = \gamma(a)\gamma(a^{-1}),$$

also ist

$$\mid a \mid \leqq \gamma(a^{-1})^{-1} = \gamma(a) \leqq \mid a \mid,$$

woraus $\gamma(a) = \mid a \mid$ folgt.

iii) Die binomische Formel liefert

$$\begin{array}{rcl}\gamma(x+y)^n & = & \gamma\big((x+y)^n\big) \\ & = & \gamma\big(\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\big) \\ & \leqq & \sum\limits_{k=0}^{n} \mid \binom{n}{k} \mid \gamma(x)^k\gamma(y)^{n-k} \\ & \leqq & (n+1)\max\{\gamma(x),\gamma(y)\}^n\end{array}$$

da der Betrag auf K nicht-archimedisch ist.

Die erste Behauptung folgt durch Ziehen der $n-$ten Wurzel, gefolgt von einem Grenzübergang für $n \to \infty$.

Falls zusätzlich $\gamma(f) < \gamma(g)$ gilt, so folgt $\gamma(g) \leqq \max\{\gamma(f+g), \gamma(-f)\} = \gamma(f+g)$. Daraus ergibt sich der Zusatz.

□

Wir können auch noch durch einen anderen Grenzübergang neue Normen definieren. Es sei $(a_n)_{n\geqq 1}$ eine Folge von Punkten in K und $(r_n)_{n\geqq 1}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $r_n \leqq 1$, so dass für alle $n \geqq 1$

$$D(a_{n+1}, r_{n+1}) \subset D(a_n, r_n)$$

gilt.

Dann ist für alle $f \in T_1$

$$\zeta_{a_{n+1},r_{n+1}}(f) \leqq \zeta_{a_n,r_n}(f).$$

Wir definieren

$$\zeta_{(a_n,r_n)_n}(f) = \inf_{n\geqq 1} \zeta_{a_n,r_n}(f).$$

Übungsaufgabe 18 *Sei $D(a_{n+1}, r_{n+1}) \subset D(a_n, r_n)$ wie oben eine absteigende Kette abgeschlossener Kreisscheiben in $D(0,1)$. Dann definiert $\zeta_{(a_n,r_n)_n}$ eine multiplikative, beschränkte Norm auf T_1. Ist $\bigcap\limits_n D(a_n, r_n) \neq \emptyset$, so folgt $\bigcap\limits_n D(a_n, r_n) = D(a_0, r_0)$ für ein $a_0 \in D(0,1)$ und ein $r_0 \in [0,1]$. Also ist der Schnitt eine abgeschlossene Kreisscheibe in $D(0,1)$ oder (im Falle $r = 0$) ein Punkt. In diesem Fall gilt $\zeta_{(a_n,r_n)_n} = \zeta_{a_0,r_0}$. Falls hingegen $\bigcap\limits_n D(a_n, r_n) = \emptyset$ ist, so ist $\inf\limits_{n\geqq 1} r_n > 0$.*

Nur im Falle von Körpern, die nicht sphärisch vollständig sind, erhalten wir also durch diese Definition neue Normen auf T_1.

Wir definieren nun den Berkovichraum zur Kreisscheibe.

Definition 3.11 *Es sei K vollständig und nicht-archimedisch. Wir definieren $\mathcal{M}(T_1)$ als die Menge aller multiplikativen, beschränkten Seminormen auf T_1.*

Wir statten $\mathcal{M}(T_1)$ mit der gröbsten Topologie aus, für die für jedes $f \in T_1$ die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}(T_1) & \longmapsto & \mathbb{R}_{\geqq 0} \\ \gamma & \longmapsto & \gamma(f) \end{array}$$

stetig wird.

Wir haben (im Falle K algebraisch abgeschlossen) schon gesehen, dass für alle $a \in D(0,1)$ und $r \in]0,1]$ die Norm $\zeta_{a,r}$ in $\mathcal{M}(T_1)$ liegt. Ferner liegen alle $\zeta_{a,0}$ in $\mathcal{M}(T_1)$ sowie für jede Folge absteigender Kreisscheiben $\big(D(a_n, r_n)\big)_{n \geqq 0}$ die Grenznorm $\zeta_{(a_n,r_n)_n}$.

Übungsaufgabe 19 *Wir können vermöge $a \mapsto \zeta_{a,0}$ die Kreisscheibe $D(0,1)$ in $\mathcal{M}(T_1)$ einbetten. Die Relativtopologie auf $D(0,1)$ stimmt mit der Topologie auf K überein.*

Wir wollen den topologischen Raum $\mathcal{M}(T_1)$ nun genauer untersuchen. Dazu brauchen wir folgende Resultate:

Satz 3.12 *(Weierstraß-Division). Es sei $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in T_1$ mit $g \neq 0$ und $\| g \| = \max\limits_{n \geqq 0} | a_n | = \left| a_{n_0} \right|$ und $| a_n | < | a_{n_0} |$ für alle $n > n_0$.*

Dann gibt es für jedes $f \in T_1$ ein $q \in T_1$ und ein Polynom $r \in K[x]$ vom Grad $< n_0$ mit

$$f = qg + r.$$

Ferner gilt $\| f \| = \max\{\| q \| \| g \|, \| r \|\}$, und q und r sind eindeutig bestimmt.

Beweis : Nach Multiplikation mit einem $a \in K$ können wir ohne Einschränkung $\| g \| = 1$ annehmen.

Wir betrachten den Unterring

$$T_1^{(1)} = \{f \in T_1 : \| f \| \leqq 1\}$$

von T_1 und das Ideal

$$\mathfrak{a} = \{f \in T_1 : \| f \| < 1\}$$

Dann ist $R_K \subset T_1^{(1)}$ und $\mathcal{M}_K \subset \mathfrak{a}$. Der Quotientenkörper $\kappa_K = R_K/\mathcal{M}_K$ ist also im Quotientenring $T_1^{(1)}/\mathfrak{a}$ enthalten. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & T_1^{(1)} & \longrightarrow & \kappa_K[x] \\ & (\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n) & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \widetilde{a_n} x^n, \end{array}$$

wobei $\widetilde{a_n}$ das Bild von a_n unter der Quotientenabbildung $R_K \to \kappa_K$ bezeichnet. Da fast alle $\widetilde{a_n}$ Null sind, ist α wohldefiniert. Ferner ist α ein surjektiver Ringhomomorphismus (Übungsaufgabe).

Wir zeigen zunächst den Zusatz zur Weierstraß-Division. Angenommen, $f = qg + r$ mit einem Polynom r vom Grad $< n_0$, dann ist nach Definition von n_0 der Grad von $\alpha(g)$ mindestens n_0. Aus $f = qg + r$ folgt $\| f \| \leqq \max\{\| q \| \| g \|, \| r \|\}$. Falls f echt kleiner als dieses Maximum ist, so wählen wir ein $a \in K^*$ mit

$$| a | = \max\{\| q \| \| g \|, \| r \|\}.$$

Dann ist $\| a^{-1} f \| < 1$, also $\alpha(a^{-1}f) = 0$, woraus

$$\alpha(a^{-1}qg + a^{-1}r) = 0$$

folgt. Das widerspricht der Tatsache, dass der Grad von $\alpha(a^{-1}r)$ echt kleiner als n_0 ist, derjenige von $\alpha(a^{-1}qg)$ aber $\geqq n_0$. Also ist $\| f \| = \max\{\| q \| \| g \|, \| r \|\}$. Die Eindeutigkeit der Weierstraß-Division folgt dann aus der Tatsache, dass $0 = qg + r$ die Bedingung $\| 0 \| = \max\{\| q \| \| g \|, \| r \|\}$, also $q = r = 0$ impliziert.

Sei $g = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ wie oben. Dann ist

$$\varepsilon = \max_{n > n_0} | a_n | < 1$$

nach Definition von n_0. Wir zeigen nun folgende Aussage:

$(*)$ Für jedes $f \in T_1$ gibt es $q \in T_1$ und $f_1 \in T_1$ sowie ein Polynom $r \in K[x]$ vom Grad $< n_0$ mit

$$f = qg + r + f_1 \quad \text{und}$$

$$\| q \|, \| r \| \leqq \| f \| \ \text{ sowie } \ \| f_1 \| \leqq \varepsilon \| f \| \ .$$

Aus der Aussage $(*)$ folgt die Weierstraß-Division, denn wir können, beginnend mit $f_0 = f$ induktiv eine Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ in T_1 definieren, so dass gilt

$$f_n = q_n g + r_n + f_{n+1}$$

wobei $q_n \in T_1$ und $r_n \in K[x]$ vom Grad $< n_0$ mit $\| q_n \| \leqq \varepsilon^n \| f \|$ und $\| r_n \| \leqq \varepsilon^n \| f \|$ sind und außerdem

$$\| f_{n+1} \| \leqq \varepsilon^{n+1} \| f_n \|$$

gilt. Also ist $q = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n \in T_1$ und $r = \sum\limits_{n=0}^{\infty} r_n \in T_1$ und r ein Polynom vom Grad $< n_0$. Da

$$f = qg + r$$

gilt, folgt die Behauptung. Es bleibt also $(*)$ zu zeigen. Dazu wählen wir zunächst ein Polynom $p \in K[x]$ mit $\| f - p \| \leqq \varepsilon \| f \|$. Ferner schreiben wir $g = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ als Summe von $g_0 = \sum\limits_{n=0}^{n} a_n x^n \in K[x]$ und $g_1 = \sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} a_n x^n \in T_1$. Definitionsgemäß ist $\| g_1 \| = \varepsilon$ und $\| g_0 \| = 1$. Wir können nun in $K[x]$ das Polynom p mit Rest durch g_0 dividieren und erhalten $p = qg_0 + r$ für $g, r \in K[x]$ und grad $(r) < n_0 =$ grad(g_0). Jetzt schreiben wir

$$\begin{aligned} f &= p + (f - p) \\ &= qg_0 + r + (f - p) \\ &= (qg + r) + \big(f - p + q(g_0 - g)\big). \end{aligned}$$

Dasselbe Argument wie zu Beginn des Beweises zeigt $\| p \| = \max\{\| q \| \| g_0 \|, \| r \|\} = \max\{\| q \|, \| r \|\}$, woraus wegen $\| p \| = \| f \|$ folgt, dass

$$\| q \|, \| r \| \leqq \| f \|$$

sind.

Außerdem ist $\| f - p \| \leqq \varepsilon \| f \|$ und $\| g_0 - g \| = \| g_1 \| = \varepsilon$, woraus für $f_1 = f - p + q(g_0 - g)$ folgt

$$\| f_1 \| \leqq \varepsilon \| f \| .$$

Damit ist $(*)$ bewiesen. □

Korollar 3.13 *T_1 zusammen mit der Gaußnorm ist ein euklidischer Ring, also insbesondere ein Hauptidealring.*

Beweis : Das folgt aus Satz 3.12. Die Euklidische Normfunktion ist gegeben durch $\delta(g) = n_0$. □

Übungsaufgabe 20 *$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n \in T_1$ ist eine Einheit in T_1 genau dann, wenn $a_0 \neq 0$ und $\mid a_n \mid < \mid a_0 \mid$ für alle $n > 0$ ist.*

Satz 3.14 *(Weierstraß'scher Vorbereitungssatz). Jedes $f \in T_1$ läßt sich schreiben als $f(x) = p(x) \cdot u(x)$, wobei $p(x) \in K[x]$ ein Polynom und $u(x) \in T_1$ eine Einheit mit $\| u \| = 1$ ist.*

Beweis : Ohne Einschränkung ist $f \neq 0$. Wir schreiben $f(x) = \sum_{n \geqq 0} a_n x^n$ mit $\mid a_{n_0} \mid = \| f \|$ und $\mid a_n \mid > \mid a_{n_0} \mid$ für alle $n > n_0$. Nun wenden wir die Weierstraß-Division (Satz 3.12) auf das Polynom x^{n_0} an und erhalten

$$x^{n_0} = qf + r$$

mit einem Polynom $r \in K[x]$ vom Grad $< n_0$. Ferner gilt

$$1 = \| x^{n_0} \| = \max\{\| q \| \| f \|, \| r \|\}.$$

Es sei $p(x) = x^{n_0} - r \in K[x]$.

Dann gilt

$$p = q \cdot f$$

und es bleibt zu zeigen, dass q eine Einheit in T_1 ist.

Es sei $c \in K^*$ mit $\mid c \mid = \| f \|$. Dann ist $\| c^{-1} f \| = 1$ und

$$\| cq \| = \mid c \mid \| q \| = \| f \| \| q \| \leqq 1.$$

Also können wir die Abbildung α aus dem Beweis von Satz 3.12 auf $c^{-1}f$ und cq anwenden und erhalten

$$\alpha(p) = \alpha(cq)\alpha(c^{-1}f).$$

Das Polynom $\alpha(p)$ hat den Grad n_0. Nach Definition von n_0 hat aber auch $\alpha(c^{-1}f)$ den Grad n_0, also ist $\alpha(cq) \in K^*$. Daher ist $cq = d + q_1$ mit einem $d \in K$, so dass $\mid d \mid = 1$ und $\| q_1 \| < 1$ gilt. Nach der Übungsaufgabe vor der Behauptung des Satzes ist also cq eine Einheit in T_1 mit $\| cq \| = 1$. Da für $u = (cq)^{-1}$

$$f = (cp) \cdot u$$

gilt, folgt unsere Behauptung. □

Satz 3.15 *Für einen vollständigen und algebraisch abgeschlossenen Körper K enthält $\mathcal{M}(T_1)$ genau die folgenden Elemente*

i) Für jedes $a \in D(0,1)$ die Seminorm $\zeta_{a,0}$. Diese Elemente heißen Punkte vom Typ I.

ii) Für jedes $a \in D(0,1)$ und $r \in]0,1]$ die Norm $\zeta_{a,r}$. Hier ist $\zeta_{a,r} = \zeta_{b,s}$ genau dann, wenn $r = s$ und $\mid a - b \mid \leqq r$ gilt. Ist $r \in \mid K^* \mid$, so heißt ein solches $\zeta_{a,r}$ vom Typ II. Ist $r \notin \mid K^* \mid$, so heißt $\zeta_{a,r}$ vom Typ III.

iii) Für jede absteigende Folge von Kreisscheiben

$$D(a_{n+1}, r_{n+1}) \subset D(a_n, r_n)$$

mit $a_n \in D(0,1)$ und $r_n \in]0,1]$, so dass $\bigcap\limits_n D(a_n, r_n) = \emptyset$ ist, die Norm $\zeta_{(a_n,r_n)_n} = \inf\limits_n \zeta_{a_n,r_n}$. Solche Elemente heißen Punkte vom Typ IV. Sie treten nur auf, wenn K nicht sphärisch vollständig ist.

Beweis : Zunächst überlegen wir uns, dass $\zeta_{a,r} = \zeta_{b,s}$ genau dann gilt, wenn $r = s \geqq \mid a - b \mid$ gilt. Dass dies eine hinreichende Bedingung ist, folgt aus $D(a,r) = D(b,r)$ für $\mid a - b \mid \leqq r$. Also nehmen wir an, dass $\zeta_{a,r} = \zeta_{b,s}$ gilt. Dann ist $r = \zeta_{a,r}(x-a) = \zeta_{b,s}(x-a) = \zeta_{b,s}\big((x-b)+(b-a)\big) = \max\{s, \mid b-a \mid\}$. Analog zeigt man $s = \max\{r, \mid b-a \mid\}$. Daraus folgt $\mid b - a \mid \leqq r = s$.

Es bleibt zu zeigen, dass jedes Element von $\mathcal{M}(T_1)$ ein Punkt vom Typ I, II, III oder IV ist. Dazu betrachten wir $\gamma \in \mathcal{M}(T_1)$ und untersuchen die Werte $\gamma(x-a)$ für alle $a \in D(0,1)$. Falls $\gamma(x-a) \geqq \gamma(x-b)$ ist, so folgt

$$(*) \quad \mid a - b \mid = \gamma(a-b) = \gamma\big((x-b)-(x-a)\big) \leqq \max\{\gamma(x-b), \gamma(x-a)\} = \gamma(x-a).$$

Hier steht sogar " = ", falls $\gamma(x-a) > \gamma(x-b)$ ist.

Wir setzen $r = \inf\limits_{a \in D(0,1)} \gamma(x-a)$. Sei $(a_n)_{n \geqq 1}$ eine beliebige Folge in $D(0,1)$, so dass $r_n = \gamma(x - a_n)$ eine absteigende Folge ist, die gegen $r = \inf\limits_n r_n$ konvergiert. Wir zeigen nun, dass dann für alle $a \in D(0,1)$ gilt

$$(**) \quad \gamma(x-a) = \lim_{n \to \infty} \zeta_{a_n,r_n}(x-a).$$

Es gilt nach Definition $r \leq \gamma(x-a)$. Falls $r = \gamma(x-a)$ ist, so ist $\gamma(x-a_n) = r_n \geqq r = \gamma(x-a)$. Aus $(*)$ folgt dann

$$\mid a_n - a \mid \leqq \gamma(x-a_n) = r_n$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\zeta_{a_n,r_n}(x-a) &= \zeta_{a_n,r_n}\big((x-a_n)+(a_n-a)\big)\\ &= \max\{r_n, \mid a_n-a\mid\} = r_n,\end{aligned}$$

woraus

$$\lim_{n\to\infty}\zeta_{a_n,r_n}(x-a) = \lim_{n\to\infty} r_n = r = \gamma(x-a)$$

folgt.

Falls $r < \gamma(x-a)$ ist, dann gilt für fast alle a_n, dass $r_n < \gamma(x-a)$ ist, also $\gamma(x-a_n) < \gamma(x-a)$.

Mit $(*)$ und seinem Zusatz folgt daraus

$$\mid a-a_n\mid = \gamma(x-a).$$

Daher ist $r_n = \gamma(x-a_n) <\mid a-a_n\mid$, und es gilt

$$\begin{aligned}\zeta_{a_n,r_n}(x-a) &= \zeta_{a_n,r_n}\big((x-a)_n+(a_n-a)\big)\\ &= \max\{r_n, \mid a_n-a\mid\}\\ &= \mid a-a_n\mid = \gamma(x-a).\end{aligned}$$

Die Folge $\zeta_{a_n,r_n}(x-a)$ wird hier also sogar stationär und insbesondere gilt $(**)$.

Falls nun $\bigcap\limits_{n\geqq 1} D(a_n,r_n) \neq \emptyset$ ist, so sei b ein Punkt in diesem Schnitt. Dann ist

$$D(b,r) = \bigcap_{n\geqq 1} D(a_n,r_n) \quad \text{(Übungsaufgabe).}$$

Für $r=0$ ist $D(b,r) = \{b\}$.

Dann ist $\zeta_{a_n,r_n} = \zeta_{b,r_n}$ und

$$\lim_{n\to\infty}\zeta_{a_n r_n}(x-a) = \zeta_{b,r}(x-a).$$

Falls $\bigcap\limits_{n\geqq 1} D(a_n,r_n) = \emptyset$ ist, so folgt aus $r_{n+1}\leqq r_n$ mit $(*)$, dass

$$\mid a_{n+1}-a_n\mid \leqq r_n.$$

Somit ist $D(a_{n+1},r_{n+1}) \subset D(a_n,r_n)$ eine absteigende Folge von Kreisscheiben.

Wir haben also gezeigt: Es gibt eine Seminorm δ in $\mathcal{M}(T_1)$ vom Typ I, II, III oder IV, so dass

$$\gamma(x-a) = \delta(x-a)$$

für alle $a \in D(0,1)$ gilt.

Ist $f \in T_1$ beliebig, so schreiben wir mit Satz 3.14 $f = pu$ für ein $p \in K[x]$ und eine Einheit u mit $\| u \| = 1$. Da K algebraisch abgeschlossen ist, gilt $p(x) = c \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$ für geeignete $c \in K$ und $a_i \in K$. Also ist $\gamma(f) = | c | \prod_{i=1}^{n} \gamma(x - a_i)\gamma(u)$. Da γ beschränkt ist, gilt $\gamma(u) \leqq \| u \| = 1$ und $\gamma(u^{-1}) \leqq \| u^{-1} \| = 1$. Daraus folgt $\gamma(u) = 1$.

Analog zeigt man $\delta(u) = 1$. Es folgt

$$\begin{aligned} \gamma(f) &= | c | \prod_{i=1}^{n} \gamma(x - a_i) \\ &= | c | \prod_{i=1}^{n} \delta(x - a_i) \\ &= \delta(p) = \delta(p)\delta(u) = \delta(f). \end{aligned}$$

Daher ist γ in der Tat eine Seminorm vom Typ I, II, III oder IV. □

Ein beliebiger vollständiger Körper K_0 kann immer in einen vollständigen, algebraisch abgeschlossenen Körper K eingebettet werden, etwa durch Übergang zur Komplettierung eines algebraischen Abschlusses. Wir können dann den Berkovichräumen über K_0 als Menge der Fixpunkte unter der Gal$(\overline{K}/K)-$Operation aus dem Berkovichraum über K zurückgewinnen.

Für den Rest des Kapitels nehmen wir an, dass K vollständig und algebraisch abgeschlossen ist.

Korollar 3.16 *Der topologische Raum $\mathcal{M}(T_1)$ ist Hausdorff'sch.*

Beweis : Nach Satz 3.15 ist jedes Element in $\mathcal{M}(T_1)$ ein Punkt vom Typ I, II, III oder IV. Sind $\zeta_{a,r} \neq \zeta_{b,s}$ mit $a, b \in D(0,1)$ und $r, s \in [0,1]$ zwei verschiedene Punkte vom Typ I, II oder III, so gilt nach Satz 3.15 ii) $| a - b | > \max\{r, s\}$ oder $| a - b | \leqq \max\{r, s\}$ und $r \neq s$. Ohne Einschränkung können wir $r \geqq s$ annehmen. Im ersten Fall gilt dann

$$\begin{aligned} \zeta_{a,r}(x - a) &= r \text{ und} \\ \zeta_{b,s}(x - a) &= \zeta_{b,s}\big((x - b) + (b - a)\big) \\ &= \max\{s, | b - a |\} = | b - a | \end{aligned}$$

Ist $2\varepsilon < | a - b | - r$, so sind die Umgebungen

$$\{\gamma \in \mathcal{M}(T_1) : r - \varepsilon < \gamma(x - a) < r + \varepsilon\}$$

von $\zeta_{a,r}$ und

$$\{\gamma \in \mathcal{M}(T_1) :| b-a | -\varepsilon < \gamma(x-a) <| a-b | +\varepsilon\}$$

von $\zeta_{b.s}$ disjunkt.

Im zweiten Fall, also für $| a-b |\leqq r$ und $r > s$ ist $D(a,r) = D(b,r)$, also $\zeta_{a,r} = \zeta_{b,r}$. Dann sind für $2\varepsilon = r - a$ die Umgebungen

$$\{\gamma \in \mathcal{M}(T_1) : s-\varepsilon < \gamma(x-b) < s+\varepsilon\}$$

von $\zeta_{b,s}$ und $\{\gamma \in \mathcal{M}(T_1) : r-\varepsilon < \gamma(x-b) < r+\varepsilon\}$ von $\zeta_{a,r} = \zeta_{b,r}$ disjunkt.

Den Fall, dass mindestens einer der zu trennenden Punkte vom Typ IV ist, lassen wir als Übungsaufgabe. □

Lemma 3.17 *Für jedes $a \in D(0,1)$ ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \rho_a : [0,1] & \longrightarrow & \mathcal{M}(T_1) \\ t & \longmapsto & \zeta_{a,t} \end{array}$$

stetig und injektiv. Das Bild von ρ_a ist also ein stetiger Weg von $\zeta_{a,0}$ nach $\zeta_{a,1} = \| \quad \|$.

Beweis : Die Injektivität folgt aus Satz 3.15, ii). Für die Stetigkeit genügt es zu zeigen, dass für alle $r, s \in \mathbb{R}$ und $f \in T_1$ das Urbild

$$\rho_a^{-1}\{\gamma \in \mathcal{M}(T_1) : r < \gamma(f) < s\} = \{t \in [0,1] : r < \zeta_{a,t}(f) < s\}$$

offen in $[0,1]$ ist.

Wir haben oben gesehen, dass für $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ gilt

$$\zeta_{a,t}(f) = \max_n\{| c_n | t^n\}.$$

Man sieht leicht, dass

$$\{t \in [0,1] : \max | c_n | t^n \in]r,s[\}$$

offen ist. Offenbar ist $\rho_a(0) = \zeta_{a,0}$ und $\rho_a(1) = \zeta_{a,1} = \| \quad \|$. □

Lemma 3.18 *Wir nehmen an, dass K nicht sphärisch vollständig ist. Es sei $\big(D(a_n, r_n)\big)_{n\geqq 0}$ eine absteigende Folge von Kreisscheiben in $D(0,1)$ mit $\bigcap\limits_n D(a_n, r_n) = \emptyset$ und $\zeta_{(a_n,r_n)_{n\geqq 0}}$ der zugehörige Punkt vom Typ IV. Also ist $r = \inf\limits_{n\geqq 0} r_n > 0$. Dann existiert für jedes $r' \in]r,1]$*

genau ein Punkt $\zeta_{a,r'}$ vom Typ II oder III mit $D(a_n, r_n) \subset D(a', r')$ für fast alle n. Die Abbildung

$$\rho : [r, 1] \longrightarrow \mathcal{M}(T_1)$$

$$\textit{mit} \quad \rho(r') = \begin{cases} \zeta_{(a_n, r_n)_{n \geqq 0}} & r' = r \\ \zeta_{a,r'} & r' > r \end{cases}$$

ist injektiv und stetig. Das Bild von ρ ist also ein stetiger Weg von $\zeta_{(a_n,r_n)_{n\geqq 0}}$ zur Gaussnorm $\| \quad \|$.

Beweis : Wir müssen zunächst die Wohldefiniertheit von $\zeta_{a,r'}$ zeigen. Angemommen $D(a, r')$ und $D(b, r')$ enthalten fast alle $D(a_n, r_n)$. Dann wählen wir ein n_0 mit $D(a_{n_0}, r_{n_0}) \subset D(a, r') \cap D(b, r')$. Also ist $D(a, r') = D(a_{n_0}, r')$ und $D(b, r') = D(a_{n_0}, r')$. Daraus folgt $\zeta_{a,r'} = \zeta_{b,r'}$.

Ist $\zeta_{a,r'} = \zeta_{b,s'}$, so folgt nach Satz 3.15 ii) $\mid a - b \mid \leqq r' = s'$. Also ist ρ injektiv.

Für $s' > r'$ in $]r, 1[$ und $\rho(r') = \zeta_{a,r'}$ ist $\rho(s') = \zeta_{a,s'}$, denn $D(a, s') \supset D(a, r')$ enthält ebenfalls fast alle $D(a_n, r_n)$. Mit dieser Beobachtung folgt die Stetigkeit wie in Lemma 3.17. □

Die Wege, die wir in Lemma 3.17 und Lemma 3.18 konstruiert haben, enthalten außer dem Anfangspunkt vom Typ I oder IV nur Punkte vom Typ II oder III.

Satz 3.19 *$\mathcal{M}(T_1)$ ist wegzusammenhängend.*

Beweis : Wir haben in Lemma 3.17 und Lemma 3.18 gesehen, dass wir jeden Punkt vom Typ I oder IV durch einen stetigen Weg mit dem Gaußpunkt verbinden können. Ist $\zeta_{a,s}$ für $a \in D(0, 1)$ und $s \in]0, 1[$ ein Punkt vom Typ II oder III, so ist die Einschränkung von ρ_a aus Lemma 3.17 auf $[s, 1]$, also die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} [s, 1] & \longrightarrow & \mathcal{M}(T_1) \\ r & \longmapsto & \zeta_{a,r} \end{array}$$

stetig und injektiv. Ihr Bild ist also ein stetiger Weg von $\zeta_{a,0}$ nach $\| \quad \|$. Daraus folgt die Behauptung. □

Übungsaufgabe 21 *Für $a \neq b$ treffen sich die Wege von $\zeta_{a,0}$ nach $\| \quad \|$ und von $\zeta_{b,0}$ nach $\| \quad \|$ im Punkt $\zeta_{a,|a-b|} = \zeta_{b,|a-b|}$ und reisen von dort zusammen zum Gaußpunkt. Es ist $\rho_{a,b} : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{M}(T_1)$,*

$$r \mapsto \begin{cases} \zeta_{a,2|a-b|r} & r \leqq \frac{1}{2} \\ \zeta_{b,2|a-b|(1-r)} & r \geqq \frac{1}{2} \end{cases}$$

ein stetiger Weg von $\zeta_{a,0}$ nach $\zeta_{b,0}$.

Wir definieren für jedes $a \in D(0,1)$ und $r \in [0,1]$:

$$\begin{array}{rcl} \triangle(a,r) & = & \{\gamma \in \mathcal{M}(T_1) : \gamma(x-a) \ \leq r\} \\ \triangle^\circ(a,r) & = & \{\gamma \in \mathcal{M}(T_1) : \gamma(x-a) < r\}. \end{array}$$

Satz 3.20 *Eine Basis der Topologie auf $\mathcal{M}(T_1)$ wird gegeben durch Mengen der folgenden Form*

$$\begin{array}{l} \triangle^\circ(a,r) \\ \mathcal{M}(T_1) \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{N} \triangle(a_i, r_i) \\ \triangle^\circ(a,r) \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{N} \triangle(a_i, r_i) \end{array}$$

mit $a, a_i \in D(0,1)$ und $r, r_i \in |K^*|$.

Beweis : Übungsaufgabe. $\square$

Korollar 3.21 *Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} D(0,1) & \hookrightarrow & \mathcal{M}(T_1) \\ b & \mapsto & \zeta_{b,0} \end{array}$$

hat dichtes Bild. Mit anderen Worten: die Punkte vom Typ I liegen dicht in $\mathcal{M}(T_1)$.

Beweis : Wir müssen nur zeigen, dass in jeder offenen Basismenge U aus Satz 3.20 ein Punkt der Form $\zeta_{b,0}$ liegt.

Ist $U = \triangle^\circ(a,r)$, so wählen wir $|b-a| < r$ und erhalten $\zeta_{b,0}(x-a) = |b-a| < r$.

Ist $U = \mathcal{M}(T_1) \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{N} \triangle(a_i, r_i)$, so wählen wir ein $b \in D(0,1)$ mit $|a_i - b| > r_i$ für alle $i = 1 \ldots N$. Falls $U \neq \emptyset$ ist, also falls $\bigcup\limits_{i=1}^{N} \triangle(a_i, r_i) \neq \mathcal{M}(T_1)$ ist, existiert immer solch ein b. Wie oben sehen wir $\zeta_{b,0}(x - a_i) = |b - a_i| > r_i$, also $b \notin \triangle(a_i, r_i)$.

Analog untersucht man $U = \triangle^\circ(a,r) \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{N} \triangle(a_i, r_i)$. $\square$

Korollar 3.22 *Die Punkte vom Typ II, also die Menge $\{\zeta_{a,r} : a \in D(0,1), r \in |K^*|\}$ liegt dicht in $\mathcal{M}(T_1)$.*

Beweis : Wir argumentieren wieder mit der Basis aus Satz 3.20.

Ist $U = \triangle^\circ(a,r)$, so wählen wir wieder b mit $|b-a| < r$ und betrachten den Punkt $\zeta_{b,s}$ vom Typ II für ein $s < r$. Dann gilt $\zeta_{b,s}(x-a) = \max\{s, |b-a|\} < r$.

Analog wählen wir für $U = \mathcal{M}(T_1) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{N} \triangle(a_i, r_i) \neq \emptyset$ ein $b \in D(0,1)$ mit $|a_i - b| > r_i$ für alle $i = 1, \dots, N$ und ein $s \leqq \min\limits_{i=1\dots N}\{r_i\}$ in $|K^\times|$. Dann gilt

$$\zeta_{b,s}(x-a_i) = \max\{s, |b-a_i|\} = |b-a_i| > r_i$$

für alle i, so dass $\zeta_{b,s}$ ein Punkt vom Typ II in U ist. Den dritten Fall behandelt man analog. □

Proposition 3.23 *$\mathcal{M}(T_1)$ ist kompakt.*

Beweis : Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\Phi : \mathcal{M}(T_1) \longrightarrow \mathbb{R}^I$$

für die Indexmenge $I = K[x]$, die durch $\Phi(\gamma) = \big(\gamma(f)\big)_{f \in I}$ gegeben ist.

Für jedes Polynom $f \in K[x]$ ist $\gamma(f) \leqq \parallel f \parallel$, also ist das Bild von Φ im Produkt der kompakten Intervalle $[0, \parallel f \parallel]$ über alle $f \in K[x]$ enthalten. Nach dem Satz von Tychonoff ist dies ein kompakter topologischer Raum.

Die Abbildung Φ ist offenbar stetig, denn alle Auswertungsabbildungen $\gamma \mapsto \gamma(f)$ sind stetig auf $\mathcal{M}(T_1)$.

Die Bedingungen, die eine multiplikative Seminorm charakterisieren, sind abgeschlossen, so dass Bild (Φ) eine abgeschlossene Teilmenge von $\prod\limits_{f \in I} [0, \parallel f \parallel]$ ist. Φ ist außerdem offenbar ein Homöomorphismus auf sein Bild, also folgt, dass $\mathcal{M}(T_1)$ kompakt ist. □

Definition 3.24 *Für $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{M}(T_1)$ definieren wir $\gamma_1 \leqq \gamma_2$, falls*

$$\gamma_1(f) \leqq \gamma_2(f)$$

für alle $f \in T_1$.

Das definiert eine partielle Ordnung auf $\mathcal{M}(T_1)$ (Übungsaufgabe). Die Gaußnorm $\parallel \ \parallel$ ist offenbar ein maximales Element für diese partielle Ordnung.

Lemma 3.25 *Es ist $\zeta_{a,r} \leqq \zeta_{b,s}$ genau dann, wenn $D(a,r) \subset D(b,s)$.*

Beweis : Da $\zeta_{a,r} = \max\limits_{x \in D(a,r)} |f(x)|$ ist, ist die Rückrichtung „$\Leftarrow$“ klar. Wir zeigen also „$\Rightarrow$“ und nehmen $\zeta_{a,r} \leqq \zeta_{b,s}$ an.

Aus $\zeta_{a,r}(x-a) \leqq \zeta_{b,s}(x-a) = \max\{s, |a-b|\}$ folgt entweder $s \geqq |a-b|$ und $s \geqq r$, und somit $D(a,r) \subset D(b,s)$ oder $s < |a-b|$ und $r \leqq |a-b|$.

Im zweiten Fall berechnen wir

$$\begin{aligned} \zeta_{a,r}(x-b) &= \max\{r, |a-b|\} = |a-b| \\ \text{und } \zeta_{b,s}(x-b) &= s \end{aligned}$$

und erhalten einen Widerspruch. □

Lemma 3.26 *Es seien $\zeta^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \zeta_{a_n,s_n}$ und $\zeta^{(2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \zeta_{b_n,s_n}$ zwei Seminormen vom Typ IV in $\mathcal{M}(T_1)$.*

Dann gilt $\zeta^{(1)} \leqq \zeta^{(2)}$ genau dann, wenn es für jedes k Indizes $m,n \geqq k$ mit $D(a_m, r_m) \subset D(b_n, s_n)$ gibt.

Beweis : Übungsaufgabe. □

Korollar 3.27 *Unter der partiellen Ordnung $\leqq$ sind die Punkte vom Typ I und IV minimal.*

Der Gausspunkt ist der eindeutige maximale Punkt.

Beweis : Wir haben schon gesehen, dass der Gausspunkt maximal ist und es ist klar, dass er der einzige Punkt mit dieser Eigenschaft ist.

Wir betrachten $\zeta_{a,0}$ vom Typ I und nehmen an $\zeta \leqq \zeta_{a,0}$ für ein $\zeta \in \mathcal{M}(T_1)$.

Falls ζ vom Typ I, II oder III ist, also $\zeta = \zeta_{b,s}$, so folgt aus Lemma 3.26, dass $\zeta = \zeta_{a,0}$ ist. Ist ζ vom Typ IV, so ergibt sich für $\zeta = \lim\limits_{n\to\infty} \zeta_{a_n,r_n}$ für die absteigende Folge $D(a_n, r_n)$ von Bällen, dass

$$\max\{|a_n - a|, r_n\} = \zeta(x-a) \leqq \zeta_{a,0}(x-a) = 0$$

ist. Also sind alle $r_n = 0$, was nicht sein kann.

Die Minimalität von Punkten vom Typ IV folgt mit Hilfe von Lemma 3.26. □

Lemma 3.28 *Für je zwei Punkte ζ_1, ζ_2 in $\mathcal{M}(T_1)$ existiert eine kleinste obere Schranke $\zeta_1 \vee \zeta_2 \in \mathcal{M}(T_1)$ bezüglich der partiellen Ordnung $\leqq$.*

Beweis : Sind $\zeta_1 = \zeta_{a,r}$ und $\zeta_2 = \zeta_{b,s}$ mit $\zeta_{a,r} \nleqq \zeta_{b,s}$ und $\zeta_{b,s} \nleqq \zeta_{a,r}$ beide vom Typ I,II oder III , so ist nach Lemma 3.26

$$\zeta_{a,|a-b|} = \zeta_{b,|a-b|}$$

eine kleinste obere Schranke.

Ist $\zeta_1 = \zeta_{a,r}$ und $\zeta_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \zeta_{a_n,r_n}$ vom Typ IV, so argumentieren wir analog mit den Seminormen auf dem Weg aus Lemma 3.18.

Für zwei Seminormen vom Typ IV lassen wir die Behauptung als Übungsaufgabe.

□

Definition 3.29 *Wir definieren den Durchmesser eines Punktes $\zeta \in \mathcal{M}(T_1)$ als*

$$\text{diam}(\zeta) = \inf\{\zeta(x-a) : a \in K\}.$$

Es ist also diam $\zeta_{a,r} = r$ für einen Punkt vom Typ I, II oder III und diam $\zeta_{(a_n,r_n)} = \lim\limits_{n\to\infty} r_n > 0$ für einen Punkt vom Typ IV.

Definition 3.30 *Es sei $d : \mathcal{M}(T_1) \times \mathcal{M}(T_1) \to \mathbb{R}$ definiert als*

$$\begin{aligned} d(\zeta,\zeta') &= 2\dim(\zeta \vee \zeta') - \text{diam}\zeta - \text{diam}\zeta' \\ &= \big((\text{diam}\zeta \vee \zeta') - \text{diam}\zeta\big) + \big((\text{diam}\zeta \vee \zeta') - \text{diam}\zeta'\big). \end{aligned}$$

Dies definiert eine Metrik auf $\mathcal{M}(T_1)$ (Übungsaufgabe).

Wir wollen uns jetzt noch die lokale Struktur von $\mathcal{M}(T_1)$ um einen Punkt $\zeta_{a,r}$ vom Typ II ansehen. Hier ist $r =\mid b \mid \in \mid K^* \mid$. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \nu : D(a,r) &\longrightarrow \kappa_K \\ c &\longmapsto \widetilde{\tfrac{a-c}{b}}, \end{aligned}$$

wobei $\widetilde{\frac{a-c}{b}}$ die Klasse des Elements $\frac{a-c}{b} \in R_K = \{x \in K :\mid x \mid\leqq 1\}$ unter der Restklassenabbildung $R_K \to \kappa_K$ bezeichnet.

Die Abbildung ν ist surjektiv, denn für jedes $x \in R_K$ liegt $a - xb \in D(a,r)$ und erfüllt $\nu(a-xb) = \tilde{x}$.

Falls andererseits c und c' in $D(a,r)$ unter ν auf denselben Wert abgebildet werden, so folgt $\frac{a-c}{b} - \frac{a-c'}{b} \in \mathcal{M}_K$, also $\mid c - c' \mid < r$. Das ist äquivalent zu der Tatsache, dass $\zeta_{c,s} = \zeta_{c',s}$ für alle s in einem Intervall $[r-\varepsilon, r]$ positiver Länge ε. Also ist $\nu(c) = \nu(c')$ genau dann, wenn sich die Wege von $\zeta_{c,0}$ nach $\|\quad\|$ und von $\zeta_{c',0}$ nach $\|\quad\|$ in einem Punkt $\zeta_{c,r-\varepsilon}$ treffen und von dort aus über $\zeta_{a,r}$ zum Gausspunkt führen.

Wir erhalten so eine Bijektion zwischen dem Restklassenkörper κ_K und der Menge von Äquivalenzklassen von Wegen von $\zeta_{c,0}$ nach $\zeta_{a,r}$, wobei wir zwei Wege äquivalent nennen, wenn sie auf einem Intervall positiver Länge übereinstimmen.

Man kann zeigen, dass dies für $r = 1$, also $\zeta_{a,r} = \|\quad\|$ alle Äquivalenzklassen von Wegen in $\|\quad\|$ sind. Für $r < 1$ kommt noch eine Klasse hinzu, die durch den Weg von $\zeta_{a,r}$ nach $\|\quad\|$ gegeben wird.

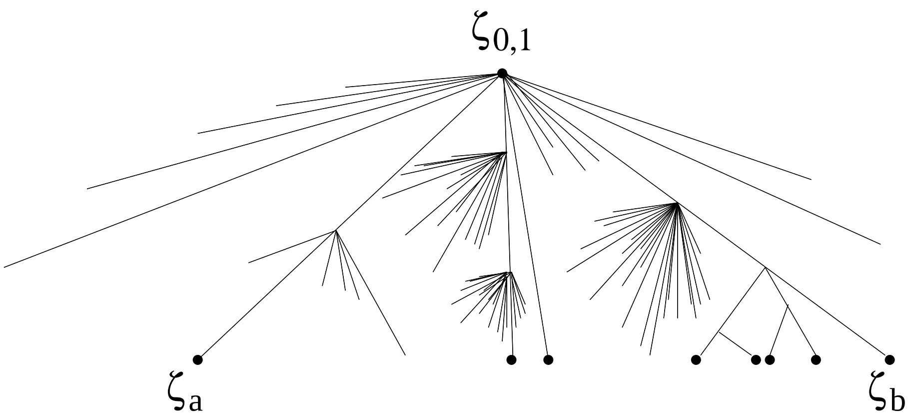
Die Kardinalität der „Richtungen" in einem Punkt vom Typ II ist also die des Restklassenkörpers κ_K.

Übungsaufgabe 22 *(nach [Ba-Ru], Kapitel 1) Die oben definierte Metrik d macht $\mathcal{M}(T_1)$ zu einem $\mathbb{R}-$Baum. Ein $\mathbb{R}-$Raum ist ein metrischer Raum (X, d), in dem es für zwei Punkte $x, y \in X$ jeweils genau einen stetigen Weg von x nach y gibt, den wir als Bild einer isometrischen Einbettung*

$$[a, b] \longrightarrow X$$

eines reellen Intervalls nach X schreiben können. Damit kann man zeigen: $\mathcal{M}(T_1)$ ist eindeutig wegzusammenhängend.

Wir können uns $\mathcal{M}(T_1)$ als verallgemeinerten Baum mit der Wurzel $\|\quad\|$ vorstellen. Die Zweige in $\|\quad\|$ stehen in Bijektion mit dem Restklassenkörper. In jedem Punkt vom Typ II, verzweigt sich der verallgemeinerte Baum wieder, so dass die neuen Zweige in Bijektion zum Restklassenkörper stehen. Die Blätter dieses verallgemeinerten Baums sind die Punkte vom Typ I oder IV. Weitere interessante Dinge über $\mathcal{M}(T_1)$ erfährt man in [Sil].



4 Affinoide Algebren

Wir wollen nun den Raum $\mathcal{M}(T_1)$ aus dem letzten Kapitel verallgemeinern. Zunächst betrachten wir Tate-Algebren in mehreren Variablen. Wir arbeiten über einem vollständigen, nicht-archimedischen Körper K, der nicht trivial bewertet ist.

Wir betrachten für $n \geqq 1$ Potenzreihen in n Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Dabei verwenden wir Multi-Index-Notation: Wir schreiben $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und für jedes $I = (i_1, \ldots, i_n) \in (\mathbb{N}_0)^n$ setzen wir $x^I = x_1^1 \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$ und $\mid I \mid = i_1 + \ldots + i_n$.

Definition 4.1 *Die Tate-Algebra T_n in n Variablen ist definiert als*

$$T_n = \Big\{ \sum_{I \in \mathbb{N}_0^n} a_I x^I : a_I \in K \textit{ mit } \mid a_I \mid \underset{|I| \to \infty}{\longrightarrow} 0 \Big\}$$

Die Bedingung $\mid a_I \mid \underset{|I| \to \infty}{\longrightarrow} 0$ bedeutet hier, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein m existiert, so dass für alle I mit $\mid I \mid \leqq m$ die Bedingung $\mid a_I \mid < \varepsilon$ gilt.

Wir definieren analog zum bekannten Fall $n = 1$ für jedes $f = \sum a_I x^I \in T_n$ die Gaußnorm als

$$\| f \| = \max_{I \in \mathbb{N}_0^n} \mid a_I \mid .$$

Übungsaufgabe 23 *i) T_n gemeinsam mit der Gaußnorm ist eine Banachalgebra über K.*

ii) Eine Potenzreihe $\sum a_I x^I$ liegt genau dann in T_n, wenn für alle $b = (b_1, \ldots, b_n) \in K^n$ die Reihe $\sum a_I b^I$ in K konvergiert.

Satz 4.2 *Sei $\overline{K}$ der algebraische Abschluss von K. Dann ist für jedes $f \in T_n$*

$$\| f \| = \sup_{\substack{x \in \overline{K} \\ |x| \leqq 1}} | f(x) | = \max_{\substack{x \in \overline{K} \\ |x| \leqq 1}} | f(x) | \ .$$

Beweis : Dies zeigt man genau wie Lemma 3.7, indem man $T_n^{(1)} = \{f \in T_n : \| f \| \leqq 1\}$ und den surjektiven $K-$Algebra-Homomorphismus

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & T_n^{(1)} & \longrightarrow & \kappa_K[x_1, \ldots, x_n] \\ & \sum\limits_I a_I x^I & \longmapsto & \sum\limits_I \widetilde{a}_I x^I \end{array}$$

betrachtet. □

Wir wollen nun Ideale $\mathfrak{a} \subset T_n$ untersuchen. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass jedes Ideal in T_n abgeschlossen ist.

Satz 4.3 *Sei $\mathfrak{a} \subset T_n$ ein Ideal. Dann existieren Erzeuger $a_1, \ldots, a_r$ von $\mathfrak{a}$ mit folgenden Eigenschaften:*

i) $\| a_i \| = 1$ *für alle* i

ii) Für jedes $f \in \mathfrak{a}$ existieren $f_1, \ldots, f_r \in T_n$ mit $f = \sum\limits_{i=1}^{r} f_i a_i$ und $\| f_i \| \leqq \| f \|$. Es gilt also $\| f \| = \max\limits_i \| f_i \|$.

Beweis : Wir setzen wieder $T_n^{(1)} = \{f \in T_n : \| f \| \leqq 1\}$ und betrachten den surjektiven $K-$Algebren-Homomorphismus

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & T_n^{(1)} & \longrightarrow & \kappa_K[x_1 \ldots x_n] \\ & \sum\limits_I a_I x^I & \longmapsto & \sum\limits_I \widetilde{a}_I x^I . \end{array}$$

Es ist $\mathfrak{a} \cap T_n^{(1)}$ ein Ideal in $T_n^{(1)}$. Da φ surjektiv ist, ist $\tilde{\mathfrak{a}} = \varphi(\mathfrak{a} \cap T_n^{(1)})$ ein Ideal im Polynomring $\kappa_K[x_1, \ldots, x_n]$. Dieser ist noethersch, also ist $\tilde{\mathfrak{a}}$ von endlich vielen Elementen $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_r)$ erzeugt, die alle ungleich null sind. Die Elemente $a_1, \ldots, a_r \in \mathfrak{a}$ erfüllen also $\| a_i \| = 1$ für alle $i = 1, \ldots, r$.

Da die Elemente $\left(x^I \varphi(a_i)\right)_{I \subset \mathbb{N}_0^n, i=1,\ldots,r}$ das Ideal $\tilde{\mathfrak{a}}$ als κ_K-Vektorraum erzeugen, finden wir eine κ_K-Basis von $\tilde{\mathfrak{a}}$, die aus solchen Elementen besteht. Indem wir Urbilder in $T_n^{(1)}$ betrachten, finden wir also eine Indexmenge M' und ein System $(y_m)_{m \in M'}$ von Elementen in $T_n^{(1)}$, so dass jedes y_m von der Form $y_m = x^I a_i$ für geeignetes I

und i ist, so dass $\big(\varphi(y_m)\big)_{m\in M'}$ eine κ_K-Basis von $\tilde{\mathfrak{a}}$ ist. Wir ergänzen $(y_m)_{m\in M'}$ um Monome vom Typ $x^I, I\in\mathbb{N}_0^n$ zu einem System $(y_m)_{m\in M}$, so dass $\big(\varphi(y_m)\big)_{m\in M}$ eine κ_K-Basis von $\kappa_K[x_1\dots x_n]$ ist.

Es ist $a_i=\sum\limits_I c_I^{(i)}x^I$ als Element von T_1. Die Folge $\{c_I^{(i)}: i=1,\dots,r,\ I\in\mathbb{N}_0^n\}$ ist eine Nulllfolge in K. Also erfüllt der kleinste vollständige Unterring S, der diese Folge enthält, die Bedingung

$$\varepsilon=\sup\{\mid a\mid : a\in S \text{ mit } \mid a\mid<1\}<1.$$

(Übungsaufgabe, siehe [Bo], 2.3, Proposition 3.)

Da alle $\mid c_I^{(i)}\mid\leqq 1$ sind, ist $S\subset R_K$. Wir erhalten eine Körpererweiterung $\kappa_S=S/\mathcal{M}_K\cap S\hookrightarrow\kappa_K=R_K/\mathcal{M}_K$ (Übungsaufgabe).

Alle Koeffizienten von $\varphi(a_i)$ liegen in κ_S, somit liegen auch alle

$$\varphi(y_m)\in\kappa_S[x_1,\dots,x_n].$$

Für jedes $J\in\mathbb{N}_0^n$ lässt sich $\varphi(x^J)\in\kappa_S[x_1,\dots,x_n]$ auf eindeutige Weise aus den $\varphi(y_m)$ linear kombinieren:

$$\varphi(x^J)=\sum_{m\in M}\widetilde{b_m}(J)\varphi(y_m),\widetilde{b_m}(J)\in\kappa_S,\ \text{fast alle } b_m=0.$$

Dann ist $\widetilde{b_m}(J)=b_m(J)+(\mathcal{M}_K\cap S)$ die Restklasse eines $b_m(J)$ in S. Somit ist $\| x^J-\sum\limits_m b_m(J)y_m\|<1$. Da alle Koeffizienten in S liegen, folgt $\| x^J-\sum b_m(J)y_m\|\leqq\varepsilon$.

Nun betrachten wir ein beliebiges Element $f(x)=\sum\limits_I d_Ix^I\in T_n$. Es gibt ein Teilpolynom $p(x)$ von $f(x)$ mit $\| f-p\|\leqq\varepsilon\| f\|$, also $\| p\|=\| f\|$. Zu p existiert ein Polynom der Form $g_1=\sum\limits_m d_m^{(1)}y_m$ mit $\| p-g_1\|\leqq\varepsilon\| f\|$, also auch $\| f-g_1\|\leqq\varepsilon\| f\|$. Da $\varepsilon<1$ ist, folgt hieraus $\| f\|=\| g_1\|$. Ferner ist

$$\begin{aligned}\| g_1\|\leqq\max_m\{\mid d_m\mid\,\| y_m\|\} &= \max_m\{\mid d_m\mid\}\\ &=:\delta.\end{aligned}$$

Dann ist $\delta^{-1}f\in T_n^{(1)}$, und es gilt $\varphi(\delta^{-1}f)=\varphi(\delta^{-1}g_1)=\sum\limits_m\widetilde{d_m\delta^{-1}}y_m\neq 0$, denn die y_m bilden eine Basis von $\kappa_S[x_1,\dots,x_n]$ und nicht alle $\widetilde{d_m\delta^{-1}}$ verschwinden.

Daraus folgt $\| f\|=\max\limits_m\{\mid d_m\mid\}$.

Induktiv können wir so eine Folge von Polynomen $g_k = \sum\limits_m d_m^{(k)} y_m \in \sum\limits_{m \in M} K y_m$ konstruieren mit

$$\| f - (g_1 + \ldots + g_k) \| \leqq \varepsilon^k \| f \| .$$

Also ist $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k$ in T_n.

Die Reihe $d_m = \sum\limits_{k=1}^{\infty} d_m^{(k)}$ konvergiert für jedes $m \in M$ in K (Übungsaufgabe), also folgt $f = \sum\limits_{m \in M} d_m y_m$ in T_n. Ein analoges Argument wie zuvor zeigt $\| f \| = \max\limits_m \{| d_m |\}$. Wir haben also jedes $f \in T_n$ als konvergente Reihe $f = \sum\limits_{m \in M} d_m y_m$ mit $\| f \| = \max\limits_{m \in M} \{| d_m |\}$ dargestellt. Jetzt können wir die Eigenschaft ii) zeigen. Wir schreiben $f \in \mathfrak{a}$ als $f = \sum\limits_{m \in M} , d_m y_m + \sum\limits_{m \in M \backslash M'} d_m y_m$.

Dann ist der erste Summand nach Definition von M' von der Form $\sum\limits_{i=1}^{r} f_i a_i$ mit $f_i \in T_n$, so dass $\| f_i \| \leqq \| f \|$ gilt. Wir müssen also nur noch zeigen, dass der zweite Summand verschwindet. Angenommen, $\sum\limits_{m \in M \backslash M'} d_m y_m = f - \sum\limits_{i=1}^{r} f_i a_i \neq 0$. Dann können wir nach Division durch seine Norm annehmen, dass $\| f - \sum\limits_{i=1}^{r} f_i a_i \| = 1$ ist. Also ist $f - \sum\limits_{i=1}^{r} f_i a_i \in \mathfrak{a} \cap T_n^{(1)}$.

Sein Bild unter φ liegt also in $\tilde{\mathfrak{a}} = \varphi(\mathfrak{a} \cap T_n^{(1)})$ und ist gleich $\sum\limits_{m \in M \backslash M'} \widetilde{d_m} \varphi(y_m)$. Nach Definition von M und M' folgt daraus $\widetilde{d_m} = 0$ für alle $m \in M \backslash M'$. Das ist ein Widerspruch.

Dasselbe Argument zeigt übrigens, dass die Darstellung $f = \sum d_m y_m$ eindeutig ist. Also ist $f = \sum\limits_{i=1}^{r} f_i a_i$ mit $\| f_i \| \leqq \| f \|$. Insbesondere folgt, dass $a_1, \ldots, a_r$ Erzeuger von $\mathfrak{a}$ sind. □

Korollar 4.4 *Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset T_n$ ist vollständig, also eine abgeschlossene Teilmenge.*

Beweis : Wir wählen Erzeuger $a_1, \ldots, a_r$ von $\mathfrak{a}$ wie in Satz 4.3. Es sei $g_n \in \mathfrak{a}$ eine Folge mit $g_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} g \in T_n$. Wir setzen $g_0 = 0$ und $g_{n+1} - g_n = \sum\limits_{i=1}^{r} f_i^{(n)} a_i$ für $n \geqq 0$ mit $\| f_i^{(n)} \| \leqq \| g_{n+1} - g_n \|$ wie in Satz 4.3. Dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_i^{(n)}$ gegen ein Element

$f_i \in T_n$. Es gilt

$$\begin{aligned} g_{m+1} &= \sum_{n=0}^{m}(g_{n+1}-g_n) \\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{n=0}^{m} f_i^{(n)} a_i \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} g, \end{aligned}$$

also ist $\sum\limits_{i=1}^{r} f_i a_i = g \in \mathfrak{a}$. □

Korollar 4.5 *Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset T_n$ ist strikt abgeschlossen, das heißt, es gibt für jedes $f \in T_n$ ein $a_0 \in \mathfrak{a}$ mit*

$$\| f - a_0 \| = \inf_{a\in\mathfrak{a}}\{\| f-a \|\}$$

Beweis : Wir betrachten die Elemente $(y_m)_{m\in M}$ aus dem Beweis von Satz 4.3 und schreiben $f = \sum\limits_{m\in M} d_m y_m$ mit $\| f \| = \max\limits_m\{| d_m |\}$. Dann ist $a_0 = \sum\limits_{m\in M'} d_m y_m \in \mathfrak{a}$, und es gilt $\| f - a_0 \| = \max\limits_{m\in M\setminus M'}\{| d_m |\}$.

Sei nun $a \in \mathfrak{a}$. Dann ist $f - a = \sum\limits_{m\in M'} b_m y_m + \sum\limits_{m\in M\setminus M'} d_m y_m$ mit Koeffizienten $b_m \in K$. Das Maximum dieser Koeffizienten ist offenbar $\geqq \max\limits_{m\in M\setminus M'}\{| d_m |\} = \| f - a_0 \|$. Daraus folgt die Behauptung. □

Es sei $\mathfrak{a} \subset T_n$ ein Ideal. Wir betrachten den Quotienten $A = T_n/\mathfrak{a}$. Dann ist A eine $K-$Algebra. Es sei $\alpha : T_n \to T_n/\mathfrak{a}$, $f \mapsto f + \mathfrak{a}$ der Restklassenhomomorphismus.

Definition 4.6 *Wir definieren die Restklassennorm auf A wie folgt: Für jede Restklasse $\alpha(f)$, $f \in T_n$, in A setzen wir*

$$\| \alpha(f) \|_\alpha = \inf_{h\in\mathfrak{a}} \| f + h \| .$$

Anders ausgedrückt: Für jedes $g \in A$ ist

$$\| g \|_\alpha = \inf_{f\in\alpha^{-1}(\{g\})} \| f \| .$$

Nach Korollar 4.5 gilt sogar

$$\| g \|_\alpha = \min_{f\in\alpha^{-1}(\{g\})} \| f \| .$$

Insbesondere ist $\| g \|_\alpha = 0$ genau dann, wenn $g = 0$ ist. Also ist $\| \quad \|_\alpha$ eine Norm auf der $K-$Algebra A (Übungsaufgabe).

Lemma 4.7 *$(A, \| \quad \|_\alpha)$ ist eine Banachalgebra.*

Beweis : Nach Definition 3.6 müssen wir Submultiplikativität und Vollständigkeit zeigen.

Es seien $g_1 = f_1 + \mathfrak{a}$ und $g_2 = f_2 + \mathfrak{a}$ Elemente aus $A = T_n/\mathfrak{a}$ mit Vertretern $f_1, f_2 \in T_n$. Wir können nach Korollar 4.5 die Vertreter f_1, f_2 so wählen, dass $\| g_1 \|_\alpha = \| f_1 \|$ und $\| g_2 \|_\alpha = \| f_2 \|$ gilt. Dann ist $f_1 f_2 + \mathfrak{a} = g_1 g_2$, also folgt definitionsgemäß

$$\begin{aligned} \| g_1 g_2 \|_\alpha &\leqq \| f_1 f_2 \| = \| f_1 \| \quad \| f_2 \| \\ &= \| g_1 \|_\alpha \| g_2 \|_\alpha . \end{aligned}$$

Um die Vollständigkeit zu zeigen, betrachten wir eine Cauchyfolge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A. Dann ist $(\| g_{k+1} - g_k \|_\alpha)_{k \geqq 1}$ eine Nullfolge. Sei $f_1 \in T_n$ ein beliebiger Vertreter der Restklasse g_1. Dann können wir induktiv Vertreter $f_k \in T_n$ von g_k wählen, so dass $(\| f_{k+1} - f_k \|)_{k \geqq 1}$ eine Nullfolge ist. Da T_n vollständig ist, konvergiert die Folge $(f_k)_{k \geqq 1}$ gegen ein $f \in T_n$. Für $g = f + \mathfrak{a}$ konvergiert dann $(g_k)_{k \geqq 1}$ gegen g. Also ist A vollständig. □

Die Banachnorm $\| \quad \|_\alpha$ auf A muss (im Gegensatz zur Gaussnorm auf T_n) allerdings nicht multiplikativ sein. Falls $A/\mathfrak{a}$ zum Beispiel nicht reduziert ist, so gibt es ein $g \neq 0$ in A mit $g^m = 0$ für ein $m \geqq 2$. Dann ist $\| g \|^m \neq \| g^m \|$.

Übungsaufgabe 24 *Auch für reduziertes $A = T_n/\mathfrak{a}$ muss $\| \quad \|_\alpha$ nicht notwendig multiplikativ sein. Betrachten Sie etwa das Beispiel*

$$A = T_2/(x_1 x_2 - \pi)$$

für ein $\pi \in K$ mit $| \pi | < 1$.

Übungsaufgabe 25 *Für $\mathfrak{a} = (x_1 x_2 - 1)$ ist $T_2/\mathfrak{a}$ als Banachalgebra isomorph zu $\{ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n : | a_n | \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ und $| a_n | \overset{n \to -\infty}{\longrightarrow} 0 \}$ mit der Norm $\| \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n \| = \max\limits_{n \in \mathbb{Z}} \{ | a_n | \}$.*

Übungsaufgabe 26 *Die durch $\| \quad \|_\alpha$ induzierte Topologie auf A stimmt mit der Quotiententopologie bezüglich der Quotientenabbildung $\alpha : T_n \to A$ überein, also ist α insbesondere stetig.*

Wir brauchen nun eine höherdimensionale Version der Weierstraß-Division.

Sei $f = \sum\limits_I a_I x^I \in T_n$. Wir schreiben

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{I \in \mathbb{N}_0^n, I = (i_1, \ldots, i_{n-1}, k)} a_I x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{n-1}^{i_{n-1}} \Big) x_n^k .$$

Dann ist $f_k = \sum\limits_{I=(i_1 \ldots i_{n-1},k)} a_I x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{n-1}^{i_{n-1}} \in T_{n-1}$ (Übungsaufgabe).

Definition 4.8 *Ein Element $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k x_n^k \in T_n$ mit $f_k \in T_{n-1}$ heißt x_n–ausgezeichnet der Ordnung s, falls gilt*

i) f_s ist eine Einheit in T_{n-1}

ii) $\| f_s \| = \| f \|$ und $\| f_s \| > \| f_k \|$ für alle $k > s$.

Übungsaufgabe 27 *$f \in T_n$ ist genau dann eine Einheit, wenn $\| f - f(0) \| < | f(0) |$ ist. Ein $f \in T_n$ ist x_n–ausgezeichnet vom Grad 0 genau dann, wenn f eine Einheit in T_n ist.*

Wir betrachten wieder die Reduktionsabbildung

$$\begin{array}{rcl} \varphi : T_n^{(1)} & \longrightarrow & \kappa_K[x_1, \ldots, x_n] \\ \sum\limits_I a_I x^I & \longmapsto & \sum\limits_I \widetilde{a}_I x^I. \end{array}$$

Dann ist ein Element $f \in T_n$ mit $\| f \| = 1$ (das können wir nach Multiplizieren mit einem $\alpha \in K^*$ immer erreichen, wenn $f \neq 0$ ist) genau dann x_n- ausgezeichnet vom Grad s, wenn $\varphi(f)$ von der Form

$$\varphi(f) = \varphi(f_s) x_n^s + \varphi(f_{s-1}) x_n^{s-1} + \ldots + \varphi(f_1) x_n + \varphi(f_0)$$

mit $\varphi(f_i) \in \kappa_K[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ und $\varphi(f_s) \in \kappa_s^*$ (also konstant) ist.

Jetzt kann man ganz analog zum Fall $n = 1$ folgenden Satz beweisen:

Satz 4.9 *(Weierstraß-Division) Es sei $g \in T_n$ ein x_n–ausgezeichnetes Element vom Grad s. Dann gibt es für jedes $f \in T_n$ genau ein $q \in T_n$ und genau ein Polynom $r \in T_{n-1}[x_n]$ vom Grad $r < s$ in x_n mit Koeffizienten in T_{n-1}, so dass*

$$f = qg + r$$

gilt. Ferner ist $\| f \| = \max\{\| q \| \| g \|, \| r \|\}$.

Analog zum Fall $n = 1$ folgt daraus

Satz 4.10 *(Weierstraß Vorbereitung) Sei $g \in T_n$ ein x_n–ausgezeichnetes Element vom Grad s. Dann gibt es ein Polynom $w \in T_{n-1}[x_n]$ vom Grad $< s$, so dass*

$$g = uw$$

für eine Einheit $u \in T_n$ gilt.

Korollar 4.11 *(Noether Normalisierung) Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subsetneqq T_n$ gibt es einen injektiven $K-$Algebra-Homomorphismus $T_d \hookrightarrow T_n$ für ein $d \leqq n$, so dass die Verknüpfung*

$$T_d \hookrightarrow T_n \to T_n/\mathfrak{a}$$

injektiv ist und $T_n/\mathfrak{a}$ als T_d-Modul endlich erzeugt ist.

Beweis : Wir führen Induktion nach n. Für $n = 0$ ist $T_n = K$ und nichts zu zeigen. Also sei $n > 0$. Wir wählen ein $g \neq 0$ in $\mathfrak{a}$ mit $\| g \| = 1$. Wir schreiben $g = \sum\limits_{k \geqq 0} g_k x_n^k$ für $g_k \in T_{n-1}$ und betrachten $\varphi(g) = \sum\limits_{k \geqq 0} \varphi(g_k) x_n^k \in \kappa_K[x_1, \ldots, x_n]$. Es gibt einen Automorphismus τ des Polynomrings $\kappa_K[x_1, \ldots, x_n]$ der Form

$$\begin{aligned} \tau(x_1) &= x_1 + x_n^{m_1} \\ \tau(x_2) &= x_2 + x_n^{m_2} \\ &\vdots \\ \tau(x_{n-1}) &= x_{n-1} + x_n^{m_{n-1}} \\ \tau(x_n) &= x_n, \end{aligned}$$

sodass $\tau\big(\varphi(g)\big) = c x_n^s +$ (Polynom vom Grad $< s$ in x_n) für ein $c \in \kappa_K^*$ und ein $s \in \mathbb{N}$ ist (Übungsaufgabe). Dann definiert $\tau : T_n \to T_n$ einen $K-$Algebra Isomorphismus. Das Ideal $\tau(\mathfrak{a})$ enthält das x_n-ausgezeichnete Element $\tau(g)$ vom Typ s.

Da $T_n/\mathfrak{a}$ isomorph zu $T_n/\tau(\mathfrak{a})$ ist, können wir also annehmen, dass $\mathfrak{a}$ ein x_n- ausgezeichnetes Element g enthält. Aus der Weierstraß-Division Satz 4.9 folgt, dass $T_{n-1} \hookrightarrow T_n \to T_n/(g)$ aus $T_n/(g)$ einen endlich erzeugten $T_{n-1}-$Modul macht, denn offenbar ist $1, x_n, \ldots, x_n^{s-1}$ ein Erzeugendensystem. Dann ist vermöge der surjektiven Abbildung $T_n/(g) \to T_n/\mathfrak{a}$ auch $T_n/\mathfrak{a}$ ein endlich erzeugter $T_{n-1}-$Modul.

Es sei $\mathfrak{a}_1$ der Kern von $T_{n-1} \hookrightarrow T_n \to T_n/\mathfrak{a}$. Dann ist $T_n/\mathfrak{a}$ auch ein endlicher $T_{n-1}/\mathfrak{a}_1-$Modul. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein d und ein injektiver Homomorphismus $T_d \hookrightarrow T_{n-1}$, so dass $T_d \hookrightarrow T_{n-1} \to T_{n-1}/\mathfrak{a}_1$ aus $T_{n-1}/\mathfrak{a}_1$ einen endlichen T_d-Modul macht. Also leistet $T_d \hookrightarrow T_{n-1} \hookrightarrow T_n$ das Verlangte. □

Übungsaufgabe 28 *1) Falls Sie die Noether-Normalisierung für Polynomringe nicht kennen, schlagen Sie diese nach.*

2) Sei L ein Körper und $R \subset L$ ein Unterring, so dass L ein endlich erzeugter $R-$Modul ist. Dann ist auch R ein Körper.

Korollar 4.12 *Es sei $\mathfrak{m} \subset T_n$ ein maximales Ideal. Dann ist $T_n/\mathfrak{m}$ eine endliche Körpererweiterung von K.*

Beweis : Nach Noether Normalisierung ist $T_n/\mathfrak{m}$ ein endlicher Modul über einem $T_d \hookrightarrow T_n/\mathfrak{m}$. Da $T_n/\mathfrak{m}$ ein Körper ist, muss T_d auch ein Körper sein $\big($ siehe vorangegangene Übungsaufgabe (2) $\big)$. Daraus folgt $d = 0$, also $T_d = K$. $\square$

Übungsaufgabe 29 *T_n ist noethersch.*

Satz 4.13 *Es sei $\mathfrak{a} \subset T_n$ ein Ideal und $A = T_n/\mathfrak{a}$ die Banachalgebra mit Norm $\| \quad \|_\alpha$ für $\alpha : T_n \to A$. Dann ist jeder $K-$Algebrenhomomorphismus von einer noetherschen Banachalgebra B nach A stetig.*

Beweis : Es sei B eine noethersche Banachalgebra mit Norm $\| \quad \|_B$ und $\psi : B \to A$ ein $K-$Algebrenhomomorphismus. Wir verwenden einen Trick, der zwei Hilfsmittel benötigt:

1) Krulls Schnittsatz: In einem Noetherschen Ring B gilt für jedes Ideal $\mathfrak{b} \neq 1$, dass $\bigcap\limits_{r \geqq 1} \mathfrak{b}^r = 0$. (Einen Beweis findet man etwa in [AM], Kapitel 10).

2) Den Satz des abgeschlossenen Graphen (closed graph theorem) aus der nichtarchimedischen Funktionalanalysis: Der $K-$Algebren-Homomorphismus $\psi : B \to A$ ist stetig, falls sein Graph
$$\{\big(b, \psi(b)\big) : b \in B\} \subset B \times A$$
eine abgeschlossene Teilmenge ist.

Um die Stetigkeit von ψ nachzuweisen, müssen wir also nur zeigen, dass der Graph von ψ abgeschlossen in $B \times A$ ist.

Dazu genügt es zu zeigen, dass für jede Nullfolge $(b_n)_{n \geqq 1}$ aus B, so dass die Bildfolge $\big(\psi(b_n)\big)_{n \geqq 1}$ in A gegen ein Element a konvergiert, bereits $a = 0$ folgt.

Dazu wählen wir ein beliebiges maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ und betrachten für jedes $r \geqq 1$:
$$\mathfrak{b} = \text{ Kern } (B \xrightarrow{\psi} A \to A/\mathfrak{m}^r).$$
Dann ist $\overline{\psi} : B/\mathfrak{b} \hookrightarrow A/\mathfrak{m}^r$ injektiv.

Wir betrachten den kanonischen surjektiven Homomorphismus

$$A/\mathfrak{m}^r \to A/\mathfrak{m}.$$

Die Noether-Normalisierung liefert $T_d \hookrightarrow T_n$ für ein $d \geqq 0$, so dass $T_d \hookrightarrow A/\mathfrak{m}^r$ injektiv und $A/\mathfrak{m}^r$ endlich erzeugt über T_d ist. Dann ist auch

$$T_d \to A/\mathfrak{m}^r \to A/\mathfrak{m}$$

injektiv, denn T_d ist reduziert. Also schließen wir wie im Beweis von Korollar 4.11, dass $d = 0$ ist.

Daher ist $A/\mathfrak{m}^r$ ein endlich-dimensionaler $K-$Vektorraum. Als Unterraum ist $B/\mathfrak{b}$ ebenfalls endlich-dimensional.

Wir versehen $B/\mathfrak{b}$ und $A/\mathfrak{m}^r$ mit den Quotientennormen $\| \; b + \mathfrak{b} \; \| = \inf\limits_{h \in \mathfrak{b}} \| \; b + h \; \|_B$ beziehungsweise $\| \; a + \mathfrak{m} \; \| = \inf\limits_{h \in \mathfrak{m}} \| \; a + h \; \|_\alpha$. Da alle Normen auf einem endlich-dimensionalen $K-$Vektorraum nach Lemma 2.17 äquivalent zur Supremumsnorm sind, ist $\overline{\psi}$ als lineare Abbildung stetig. Definitionsgemäß haben wir das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "q_B"'] & A \arrow[d, "q_A"] \\ B/\mathfrak{b} \arrow[r, "\overline{\psi}"] & A/\mathfrak{m}^r, \end{tikzcd}$$

wobei die vertikalen Abbildungen die Quotientenabbildungen sind. Diese sind stetig, also ist auch $\overline{\psi} \circ q_B = q_A \circ \psi$ stetig. Nun betrachten wir eine Nullfolge $(b_n)_{n \geqq 1}$ in B, so dass $\psi(b_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a \in A$. Da $q_A \circ \psi$ stetig ist, ist $\big(q_A \circ \psi(b_n)\big)_{n \geqq 1}$ ebenfalls eine Nullfolge. Also ist $q_A(a) = 0$. Daher liegt a in $\mathfrak{m}^r$ für alle $r \geqq 1$. Nach Krulls Schnittsatz folgt $a = 0$. □

Korollar 4.14 *Für zwei verschiedene surjektive $K-$Algebra-Homomorphismen $\alpha_1 : T_n \to A$ und $\alpha_2 : T_m \to A$ vermitteln die Banachnormen $\| \quad \|_{\alpha_1}$ und $\| \quad \|_{\alpha_2}$ dieselbe Topologie auf A.*

Beweis : Das folgt sofort aus Satz 4.13, angewandt auf die Identität auf A. □

Wir betrachten jetzt eine Variante der Tate-Algebra.

Definition 4.15 *Für jedes Tupel von n positiven reellen Zahlen $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$ sei* $T_{n,r} = \{ \sum\limits_{I \in \mathbb{N}_0^n} a_I x^I : \mid a_I \mid r^I \underset{|I| \to \infty}{\longrightarrow} 0 \}$.

Hier schreiben wir für $r = (r_1, \dots, r_n)$ und $I = (i_1, \dots, i_n)$ wieder $r^I = r_1^{i_1} \cdot \dots \cdot r_n^{i_n}$.

Die $K-$Algebra $T_{n,r}$ wird zusammen mit der multiplikativen Norm

$$\| \sum a_I x^I \|_r = \max_I \{ | a_I | r^I \}$$

zu einer Banachalgebra (Übungsaufgabe.)

Für $n = 1$ und $r = r_1 \leq 1$ liegt $T_1 \subset T_{1,r}$ und $\| \quad \|_r = \zeta_{o,r}$ aus Kapitel 3.

Allgemein gilt: Für $r_1 < s_1, \dots, r_n < s_n$ ist offenbar $T_{n,s} \subset T_{n,r}$, die beiden Normen $\| \quad \|_r$ und $\| \quad \|_s$ stimmen aber natürlich auf $T_{n,s}$ nicht überein.

Es ist außerdem $T_n = T_{n,1}$ für $1 = (1, \dots, 1)$.

Lemma 4.16 *Ist $r = (r_1, \dots, r_n) \in | K^* |^n$, so vermittelt die Abbildung $x_i \mapsto r_i^{-1} x_i$ einen Isomorphismus $\rho : T_n \to T_{n,r}$, der eine Isometrie ist.*

Beweis : Offenbar ist

$$\rho(\sum_I a_I x^I) = \sum a_I r^{-I} x^I.$$

Für $f \in T_n$ liegt also $\rho(f) \in T_{n,r}$. A Die Abbildung $x_i \mapsto r_i x_i$ vermittelt eine Umkehrabbildung $T_{n,r} \to T_n$. Definitionsgemäß ist

$$\| \sum a_I x^I \| = \max_I \{ | a_I | \} = \| \sum a_I r^{-I} x^I \|_r,$$

also ist ρ eine Isometrie. □

Definition 4.17 *Eine Banachalgebra A heißt $K-$affinoid, falls es ein $r \in \mathbb{R}^n_{>0}$ und einen surjektiven $K-$Algebrenhomomorphismus*

$$\alpha : T_{n,r} \to A$$

gibt, so dass die Norm

$$g \mapsto \| g \| = \inf_{\substack{f \in T_{n,r} \\ \alpha(f) = g}} \| f \|_r$$

äquivalent zur Banachnorm auf A ist.

Falls es ein $\alpha : T_n \to A$ gibt mit dieser Eigenschaft (falls also $r = 1$ gewählt werden kann), dann heißt A strikt $K-$affinoid.

Übungsaufgabe 30 *Es sei A eine Banachalgebra über einem nicht-archimedischen Körper K.*

Dann ist die Banachnorm auf A nach Lemma 3.10 iii) nicht-archimedisch.

1) Ein normierter $A-$Modul ist ein $A-$Modul M zusammen mit einer Normabbildung

$$\| \quad \| : \ M \to \mathbb{R}_{\geqq 0},$$

so dass gilt

i) $\| m \| = 0$ *genau dann, wenn* $m = 0$.

ii) $\| -m \| = \| m \|$ *für alle* $m \in M$.

iii) $\| m + n \| \leqq \max\{\| m \|, \| n \|\}$ *für alle* $m, n \in M$.

iv) $\| a\, m \| \leqq \| a \|_A \| m \|$ *für alle* $a \in A, m \in M$.

Ein $A-$Modulhomomorphismus $f : M \to N$ zwischen normierten $A-$Moduln heißt beschränkt, falls es ein $C > 0$ gibt mit $\| f(m) \| \leqq C \| m \|$ für alle $m \in M$. Für zwei normierte $A-$Moduln $(M, \| \quad \|_M)$ und $(N, \| \quad \|_N)$ trägt das Tensorprodukt $M \otimes_A N$ die Funktion

$$\| x \| = \inf_{x = \sum_{i=1}^{r} m_i \otimes n_i} \max\{\| m_i \|_M \| n_i \|_N\},$$

wobei das Infinum über alle Darstellungen von x als Summe reiner Tensoren läuft. Diese Funktion erfüllt ii), iii) und iv), definiert also eine Seminorm auf $M \otimes_A N$.

Wir komplettieren $M \otimes_A N$. nach $\| \quad \|$ und teilen dann den Kern von $\| \quad \|$ heraus. Das liefert einen normierten $A-$Modul $M \hat{\otimes}_A N$.

Die bilineare Abbildung

$$\tau : M \times N \to M \hat{\otimes}_A N$$

erfüllt dann folgende universelle Eigenschaft:

i) *Für jede beschränkte bilineare Abbildung*

$$\varphi : M \times N \to P$$

in einem vollständigen normierten $A-$Modul gibt es genau eine beschränkte $A-$lineare Abbildung

$$\Phi : M \hat{\otimes}_A N \to P,$$

die folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau"'] & P \\ M\hat{\otimes}_A N \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd} .$$

(Siehe [BGR], § 2.1)

2) Jetzt betrachten wir $K-$Banachalgebren B und C mit beschränkten $K-$Algebren-Homomorphismen.

$$\beta : A \to B \text{ und } \gamma : A \to C.$$

Dann sind B und C insbesondere normierte $A-$Moduln, daher existiert $B\hat{\otimes}_A C$.

Dieser $A-$Modul trägt eine Multiplikation, die $(b_1\hat{\otimes}c_1)(b_2\hat{\otimes}c_2) = (b_1b_2\hat{\otimes}c_1c_2)$ erfüllt. Hier schreiben wir $b\hat{\otimes}c$ für $\tau(b,c) \in B\hat{\otimes}_A C$.

Dann sind

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : B & \longrightarrow & B\hat{\otimes}_A C \\ b & \longmapsto & b\hat{\otimes}1 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 : C & \longrightarrow & B\hat{\otimes}_A C \\ c & \longmapsto & 1\hat{\otimes}c \end{array}$$

beschränkte $A-$Algebren-Homomorphismen. Sie erfüllen folgende universelle Eigenschaft:

Ist D eine beliebige $K-$Banachalgebra mit einem beschränkten Algebrenhomomorphismus $\delta : A \to D$ zusammen mit beschränkten $A-$Algebrenhomomorphismen

$$\varphi : B \to D \text{ und } \psi : C \to D,$$

so gibt es genau einen beschränkten $A-$Algebren-Homomorphismus

$$\Phi : B\hat{\otimes}_A C \to D,$$

so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "\delta_1"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ B\hat{\otimes}_A C \arrow[rr, "\Phi"] & & D \\ & C \arrow[ul, "\delta_2"] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. ([BGR], § 3.1)

Lemma 4.18 *Sind A und B $K-$affinoide Algebren, dann ist auch $A\hat{\otimes}_K B$ eine $K-$affinoide Algebra.*

Beweis : Es ist $A \simeq T_{m,r}/\mathfrak{a}$ und $B \simeq T_{n,s}/\mathfrak{b}$.

Es sei $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \subset T_{m+n,r+s}$ das Ideal, das von den Bildern von $\mathfrak{a}$ unter $T_{m,r} \hookrightarrow T_{m+n,r+s}$ und von $\mathfrak{b}$ unter $T_{n,s} \hookrightarrow T_{m+n,r+s}$ in $T_{m+n,r+s}$ erzeugt wird. Dann vermittelt $T_{n,r} \to A$ und $T_{m,s} \to B$ einen beschränkten Homomorphismus

$$\Theta : T_{m+n,r+s}/(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \to A\hat{\otimes}_K B.$$

Wir haben natürliche Abbildungen

$$\begin{aligned} \alpha : A \simeq T_{m,r}/\mathfrak{a} &\to T_{m+n,r+s}/(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \\ \text{und } \beta : B \simeq T_{n,s}/\mathfrak{b} &\to T_{m+n,r+s}/(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}). \end{aligned}$$

Diese erfüllen die universelle Eigenschaft des kompletten Tensorproduktes $A\hat{\otimes}_K B$. Also muss Θ ein Isomorphismus sein mit einer beschränkten Umkehrabbildung. Daher ist $A\hat{\otimes}_K B$ eine affinoide $K-$Algebra. □

Korollar 4.19 *Sind A, B und C affinoide $K-$Algebren und $\beta : A \to B$ sowie $\gamma : A \to C$ beschränkte Homomorphismen, so ist auch $B\hat{\otimes}_A C$ eine affinoide $K-$Algebra.*

Beweis : Nach Lemma 4.18 ist $B\hat{\otimes}_K C$ eine $K-$affinoide Algebra.

Nach der universellen Eigenschaft von $B\hat{\otimes}_K, C$ angewandt auf $B \to B\hat{\otimes}_A C$ und $C \to B\hat{\otimes}_A C$, existiert genau ein beschränkter $K-$Algebren Homomorphismus Θ. $B\hat{\otimes}_K C \to B\hat{\otimes}_A C$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ B\hat{\otimes}_K C \arrow[rr, "\Theta"] & & B\hat{\otimes}_A C \\ & C \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Offenbar ist Θ surjektiv. Man zeigt nun, dass $B\hat{\otimes}_K C/\text{Kern}\Theta$ die universelle Eigenschaft von $B\hat{\otimes}_A C$ erfüllt (Übungsaufgabe). Daher vermittelt Θ einen Isomorphismus

$$B\hat{\otimes}_K C/\text{Kern } \Theta \simeq B\hat{\otimes}_A C,$$

der in beide Richtungen beschränkt ist. Mit $B\hat{\otimes}_K C$ ist also auch $B\hat{\otimes}_A C$ eine $K-$affinoide Algebra. □

Übungsaufgabe 31 *(siehe [Ber], 2.1)*

1) *Für alle $r > 0$ ist*

$$\begin{aligned} K_r &= \{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n : \mid a_n \mid r^n \to 0 \text{ für} \\ &\quad n \to \infty \text{ und für } n \to -\infty \} \end{aligned}$$

eine affinoide $K-$Algebra.

2) *Ist $r \notin \sqrt{\mid K^* \mid} = \{c \in \mathbb{R}^* : \text{es gibt ein } k \geqq 0 \text{ mit } c^k \in \mid K^* \mid\}$,*

so ist K_r ein nicht-archimedischer Körper.

3) *Für jedes Tupel $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$, so dass die Bilder von $r_1, \ldots, r_n$ im (multiplikativen) $\mathbb{Q}-$Vektorraum $\mathbb{R}_{>0}/\sqrt{\mid K^* \mid}$ linear unabhängig sind, ist*

$$K_{r_1}, \ldots, r_n = K_{r_1} \mathop{\hat{\otimes}}_K \cdots \mathop{\hat{\otimes}}_K K_{r_n}$$

ein nicht-archimedischer Körper, so dass $\mid K^*_{r_1,\ldots,r_n} \mid$ sowohl $\mid K^* \mid$ als auch $r_1, \ldots, r_n$ enthält.

4) *Für jede affinoide $K-$Algebra A existiert ein nicht-archimedischer Erweiterungskörper L/K, so dass $A \mathop{\hat{\otimes}}_K L$ strikt $L-$affinoid ist.*

5) *Existiert ein $\alpha : T_{n,r} \to A$ wie in Definition 4.17 mit $r_i \in \sqrt{\mid K^* \mid}$ für alle i, so ist A strikt $K-$affinoid.*

6) *Für $r \in \mathbb{R}^n_{>0}$ und einen surjektiven K-Algebra Homomorphismus $\alpha : T_{n,r} \to A$ ist die Quotientenseminorm*

$$g \mapsto \inf_{f \in T_{n,r}, \alpha(f)=g)} ||f||_r$$

eine Norm auf A.

Lemma 4.20 *Ist A strikt affinoid, so ist für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ der Quotient $A/\mathfrak{m}$ eine endliche Körpererweiterung von K.*

Beweis : Das zeigt man genau wie in Korollar 4.12. □

Wir definieren $\text{Max}(A)$ als Menge der maximalen Ideale in einem Ring A.

Proposition 4.21 *Ist $\varphi : B \to A$ ein Homomorphismus strikt $K-$affinoider Algebren, so induziert φ eine Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} Max(A) & \to & Max(B) \\ \mathfrak{m} & \mapsto & \varphi^{-1}(\mathfrak{m}). \end{array}$$

Beweis : $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ ist ein Ideal in A. Da die von φ induzierte Abbildung $B/\varphi^{-1}(\mathfrak{m}) \hookrightarrow A/\mathfrak{m}$ injektiv ist, ist $B/\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ ein Unterring des Körpers $A/\mathfrak{m}$. Dieser ist nach Lemma 4.20 endlich erzeugt über K, also erst recht über $B/\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$. Nach der Übungsaufgabe vor Korollar 4.12 ist $B/\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ dann ein Körper, also $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ ein maximales Ideal. □

Wir werden jetzt einige Beispiele für affinoide Algebren kennenlernen.

Definition 4.22 *Es sei A eine $K-$affinoide Algebra mit Norm $\| \ \|_A$. Für alle $n \geqq 1$ und $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n_{\geqq 0}$ definieren wir*

$$A\{r_1^{-1}x_1, \dots, r_n^{-1}x_n\} = \Big\{ \sum_{I \in \mathbb{N}_0^n} a_I x^I : a_I \in A, \| a_I \| \, r^I \underset{|I| \to \infty}{\longrightarrow} 0 \Big\}.$$

Für $A = K$ ist offenbar

$$K\{r_1^{-1}x_1, \dots, r_n^{-1}x_n\} = T_{n,r}.$$

Wir definieren eine Norm auf $A\{r_1^{-1}x_1, \dots, r_n^{-1}x_n\}$ durch

$$\| \sum a_I x^I \| = \max\{\| a_I \|_A \, r^I\}.$$

Dann ist $A\{r_1^{-1}x_1, \dots, r_n^{-1}x_n\}$ mit dieser Norm eine Banachalgebra und ebenfalls $K-$affinoid (Übungsaufgabe).

Definition 4.23 *Es sei A eine $K-$affinoide Algebra und $f = (f_1, \dots, f_n)$ sei ein Tupel von Elementen in A. Für alle $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$ setzen wir*

$$A\{p^{-1}f\} = A\{p_1^{-1}x_1, \dots, p_n^{-1}x_n\}/(x_i - f_i)$$

Ist $g = (g_1, \dots, g_m)$ ein weiteres Tupel von Elementen in A und $q = (q_1, \dots, q_m) \in \mathbb{R}^m_{>0}$, so setzen wir

$$A\{p^{-1}f, qg^{-1}\} = A\{p_1^{-1}x_1, \dots, p_n^{-1}x_n, q_1y_1, \dots, q_my_m\}(x_i - f_i, g_iy_i - 1)$$

Wir statten beide Algebren mit den Quotientenseminormen aus.

Übungsaufgabe 32 *Die Quotientenseminormen sind Normen und $A\{p^{-1}f\}$ und $A\{p^{-1}f, qg^{-1}\}$ sind K–affinoid. Falls A strikt K–affinoid sind und alle a_i, b_j in $\sqrt{| K^* |}$ liegen, so sind $A\{p^{-1}f\}$ und $A\{p^{-1}f, qg^{-1}\}$ auch strikt K–affinoid.*

Übungsaufgabe 33 *Es sei A eine K–affinoide Algebra. Wir definieren eine Funktion*

$$\begin{aligned} \rho : A &\to \mathbb{R}_{\geqq 0} \\ f &\mapsto \inf_{n \geqq 0} \sqrt[n]{\| f^n \|}. \end{aligned}$$

1) *Es ist $\rho(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| f^n \|}$.*

2) *ρ ist eine beschränkte Seminorm auf A mit der Eigenschaft*

$$\rho(f^n) = \rho(f)^n \quad \textit{für alle } f \in A, n \geqq 1.$$

3) *Es sei A eine strikt K-affinoide Algebra. Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ ist nach Lemma 4.20 $A/\mathfrak{m}$ eine endliche Körpererweiterung von K, auf die wir den Betrag eindeutig fortsetzen können. Wir schreiben für alle $f \in A$*

$$| f(\mathfrak{m}) | = | f + \mathfrak{m} |,$$

wobei $f + \mathfrak{m} \in A/\mathfrak{m}$ die Restklasse von f ist. Dann gilt

$$\rho(f) = \max_{\mathfrak{m} \subset A \textit{ maximal}} \{| f(\mathfrak{m} |\}.$$

(Das ist eine Verallgemeinerung von Lemma 3.7.)

4) *Sei A strikt K–affinoid. $f \in A$ ist nilpotent genau dann, wenn $\rho(f) = 0$. Ist A reduziert, so ist also ρ eine Norm auf A.*

5) *Für jedes $f \in A$ gibt es eine Konstante $C > 0$ und ein $n_0 \geqq 1$ mit*

$$\| f^n \| \leqq C\rho(f) \quad \textit{für alle } n \geqq n_0.$$

6) *Ist A reduziert, so gibt es sogar ein $C > 0$ mit $\| f \| \leqq C\rho(f)$ für alle $f \in A$.*

7) *Es sei B eine K affinoide Algebra und $\varphi : A \to B$ ein K–Algebrenhomomorphismus. Für beliebige $f_1, \ldots, f_n \in B$ und positive reelle Zahlen $r_1, \ldots, r_n$ mit*

$$r_i \geqq \rho(f_i) \quad \textit{für alle } i = 1, \ldots, n$$

gibt es genau einen stetigen K–Algebrenhomomorphismus

$$\Phi : A\{r_1^{-1}x_1, \ldots, r_n^{-1}x_n\} \longrightarrow B,$$

der φ fortsetzt und x_i für alle $i = 1, \ldots, n$ auf f_i abbildet.

5 Das Spektrum affinoider Algebren

Es sei K ein vollständiger, nicht-archimedischer Körper, der nicht trivial bewertet ist, und A eine affinoide $K-$Algebra.

Definition 5.1 *Das Berkovich-Spektrum von A ist definiert als*

$$\mathcal{M}(A) = \{\gamma : A \to \mathbb{R}_{\geqq 0}, \gamma \neq 0 \textit{ multiplikative, beschränkte Seminorm}\}$$

(siehe Definition 3.9).

Übungsaufgabe 34 *Ist $\gamma \neq 0$ eine beschränkte Seminorm auf A, so ist $\gamma(1) = 1$, also auch $\gamma(a) = \mid a \mid$ für alle $a \in K$.*

Wir versehen $\mathcal{M}(A)$ mit der gröbsten Topologie, so dass für jedes $f \in A$ die Auswertungsabbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(A) & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geqq 0} \\ \gamma & \longmapsto & \gamma(f) \end{array}$$

stetig ist.

Für $A = T_1$ haben wir den topologischen Raum $\mathcal{M}(A)$ in Kapitel drei untersucht. In diesem Fall ist die Banachnorm auf $A = T_1$ multiplikativ, liefert also ein Element in $\mathcal{M}(A)$. Für beliebige affinoide Algebren muss das nicht der Fall sein. Die erste Frage, die sich stellt, ist also: Ist $\mathcal{M}(A) \neq \emptyset$?

Satz 5.2 *Sei A eine affinoide $K-$Algebra. Dann ist $\mathcal{M}(A) \neq \emptyset$.*

Beweis : Da A $K-$affinoid ist, gibt es einen surjektiven Homomorphismus $\alpha : T_{n,r} \to A$, so dass $\| \quad \|_\alpha$ die Banachnorm auf A ist. Es sei $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal. Dann ist $\alpha^{-1}(\mathfrak{m}) \subset T_{n,r}$ ein Ideal und die affinoide Algebra

$$T_{n,r}/\alpha^{-1}(\mathfrak{m})$$

erfüllt $T_{n,r}/\alpha^{-1}(\mathfrak{m}) \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{m}$. Finden wir eine beschränkte multiplikative Seminorm $\gamma \neq 0$ auf dieser Algebra, so ist die Verknüpfung von γ mit der Quotientenabbildung $A \to A/\mathfrak{m}$ ein Element von $\mathcal{M}(A)$.

Also können wir annehmen, dass A ein Körper ist.

Die Menge der beschränkten Seminormen $\neq 0$ auf A ist nicht leer, denn sie enthält die Banachnorm. Da der Kern einer Seminorm immer ein Ideal ist und der Körper A

nur die Ideale 0 und A enthält, sind alle Seminormen $\neq 0$ auf A Normen. Die Menge der beschränkten Seminormen $\neq 0$ trägt die partielle Ordnung

$$\gamma_1 \leqq \gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_1(f) \leqq \gamma_2(f) \text{ für jedes } f \in A.$$

Da jede total geordnete Teilmenge von beschränkten Seminormen das infinum als untere Schranke besitzt (Übungsaufgabe), enthält die Menge der beschränkten Seminormen $\neq 0$ auf A nach dem Zorn'schen Lemma ein minimales Element γ_0. Wir zeigen nun, dass γ_0 multiplikativ ist. Dazu zeigen wir zunächst $\gamma_0(f^{-1}) = \gamma_0(f)^{-1}$ für alle $n \geqq 1$ und alle $f \in A\backslash\{0\}$. Falls das nicht gilt, so existiert ein $f \in A\backslash\{0\}$ mit $\gamma_0(f)^{-1} < \gamma_0(f^{-1})$, denn γ_0 ist submultiplikativ.

Es sei $r = \gamma_0(f^{-1})^{-1}$. Dann ist

$$r < \gamma_0(f).$$

Wir betrachten $A\{r^{-1}x\}$ wie in Definition 4.23 mit der Norm $\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \| = \max\{\gamma_0(a_n) r^n\}$.

Wir bezeichnen die Quotientenseminorm auf $A\{r^{-1}x\}/(x-f)$ mit γ. Nun betrachten wir den $K-$Algebren-Homomorphismus $\varphi : A \to A\{r^{-1}x\}/(x-f)$. Das Element $(x-f)$ ist nicht invertierbar in $A\{r^{-1}x\}$ (Übungsaufgabe). Also ist φ injektiv. Es ist $\gamma\big(\varphi(a)\big) \leqq \gamma_0(a)$ nach Definition von γ. Außerdem gilt

$$\gamma\big(\varphi(f)\big) = \gamma(x) \leqq r < \gamma_0(f).$$

Da $\gamma \circ \varphi$ eine beschränkte Seminorm auf A ist, widerspricht das der Minimalität von γ_0.

Also gilt $\gamma_0(f^{-1}) = \gamma_0(f)^{-1}$ für alle $f \neq 0$ in A.

Sind $f, g \in A$ beliebig mit $f \neq 0$ und $g \neq 0$, so existieren $f^{-1}, g^{-1} \in A$, da A ein Körper ist. Also gilt

$$\begin{aligned} \gamma_0(fg)^{-1} = \gamma_0(g^{-1}f^{-1}) &\leqq \gamma_0(g^{-1})\gamma_0(f^{-1}) \\ &= \gamma_0(g)^{-1}\gamma_0(f)^{-1}, \end{aligned}$$

woraus $\gamma_0(fg) \geqq \gamma_0(f)\gamma_0(g)$, also insgesamt $\gamma_0(fg) = \gamma_0(f)\gamma_0(g)$ folgt. Daher ist γ_0 multiplikativ und somit in $\mathcal{M}(A)$ enthalten. $\square$

Proposition 5.3 *Für jede affinoide $K-$Algebra A ist $\mathcal{M}(A)$ Hausdorffsch.*

Beweis : Es seien $\gamma_1 \neq \gamma_2$ in $\mathcal{M}(A)$ zwei multiplikative, beschränkte Seminormen. Dann gibt es ein $f \in A$ mit $\gamma_1(f) \neq \gamma_2(f)$. Ohne Einschränkung ist $\gamma_1(f) < \gamma_2(f)$. Wir finden ein $r \in \mathbb{R}$ mit

$$\gamma_1(f) < r < \gamma_2(f).$$

Dann sind $\{\gamma \in \mathcal{M}(A) : \gamma(f) < r\}$ und $\{\gamma \in \mathcal{M}(A) : \gamma(f) > r\}$ zwei disjunkte offene Umgebungen um γ_1 beziehungsweise γ_2. □

Als nächsten Schritt wollen wir zeigen, dass $\mathcal{M}(A)$ kompakt ist. Dazu müssen wir mit Netzen arbeiten.

Definition 5.4 *i) Eine Menge Γ mit einer reflexiven und transitiven partiellen Ordnung $\geqq$ heißt gerichtet, falls für alle $\alpha, \beta \in \Gamma$ ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma \geqq \alpha$ und $\gamma \geqq \beta$ existiert.*

ii) Eine Teilmenge $\Gamma' \subset \Gamma$ einer gerichteten Menge Γ heißt kofinal, falls es für alle $\alpha \in \Gamma$ ein $\beta \in \Gamma'$ mit $\beta \geqq \alpha$ gibt.

Beispiel: Ist X ein topologischer Raum und $x \in X$, so ist die Menge aller offenen Umgebungen von x eine gerichtete Menge bezüglich der Inklusion.

Definition 5.5 *Sei X eine Menge. Ein Netz in X ist eine Abbildung*

$$h : \Gamma \to X$$

einer gerichteten Menge Γ nach X. Wir schreiben auch einfach $h(\alpha) = x_\alpha$ und bezeichnen ein Netz in X mit $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$.

Beispiel: Eine Folge in X ist ein Netz auf $\Gamma = \mathbb{N}$.

Definition 5.6 *Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Ein Netz $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ konvergiert gegen x (wir schreiben $x_\alpha \to x$), falls es für jede offene Umgebung U um x ein $\alpha_0 \in \Gamma$ gibt, so dass $x_\alpha \in U$ für alle $\alpha \geqq \alpha_0$.*

Nun lassen sich viele Eigenschaften metrischer Räume, die mit Folgen definiert sind, auf topologische Räume und Netze übertragen:

Sei X ein topologischer Raum.

1) Ist $Y \subset X$ eine Teilmenge, so liegt $x \in X$ genau dann im Abschluss $\overline{Y}$ von Y, wenn es ein Netz in Y gibt, das gegen X konvergiert.

2) Ein topologischer Raum X ist Hausdorffsch, falls jedes Netz in X höchstens einen Grenzwert hat.

3) Es sei $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ ein Netz in X. Ist $j : \Gamma' \to \Gamma$ eine Abbildung, so dass $j(\Gamma') \subset \Gamma$ kofinal ist, so heißt $\{x_{j(\alpha')}\}_{\alpha'\in\Gamma'}$ Teilnetz von $\{x_\alpha\}_{\alpha\in X}$. Ein topologischer Raum X ist quasi-kompakt, falls jedes Netz in X ein konvergentes Teilnetz hat. Dabei heißt ein topologischer Raum quasikompakt, falls jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Einen Raum, der Hausdorffsch und quasikompakt ist, nennen wir kompakt.

4) Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen, so ist f genau dann stetig, wenn für jedes Netz $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ mit $x_\alpha \to x$ auch $f(x_\alpha) \to f(x)$ konvergiert.

Satz 5.7 *Für jede affinoide $K-$Algebra A ist das Berkovich Spektrum $\mathcal{M}(A)$ ein kompakter topologischer Raum.*

Beweis : Nach Proposition 5.3 ist $\mathcal{M}(A)$ Hausdorffsch. Wir müssen also nur die Quasikompaktheit zeigen. Dazu zeigen wir, dass jedes Netz $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ in $\mathcal{M}(A)$ ein konvergentes Teilnetz hat. Es sei $\|\ \ \|$ die Banachnorm auf A. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} i : \mathcal{M}(A) &\to \prod_{f\in A} [0, \| f \|] \\ \gamma &\mapsto \big(\gamma(f)\big)_{f\in A.} \end{aligned}$$

Da $\gamma \in \mathcal{M}(A)$ beschränkt ist, ist $\gamma(f) \leqq \| f \|$, also ist i wohldefiniert. Offenbar ist i injektiv. Wir versehen die rechte Seite mit der Produkttopologie, also der gröbsten Topologie, so dass alle Projektionen stetig sind. Da alle Intervalle $[0, \| f \|]$ kompakt sind, ist nach dem Satz von Tychonoff auch der Produktraum $\prod\limits_{f\in A} [0, \| f \|]$ kompakt. Daher enthält das Netz $\{i(x_\alpha)\}_{\alpha\in\Gamma}$ in $\prod\limits_{f\in A} [0, \| f \|]$ ein konvergentes Teilnetz $\{i(x_{j(\beta)})\}_{\beta\in\Gamma'}$, das gegen ein $y \in \prod\limits_{f\in A} [0, \| f \|]$ konvergiert. Wir definieren

$$\begin{aligned} \gamma : A &\to \mathbb{R}_{\geqq 0} \\ f &\mapsto y_f. \end{aligned}$$

Da alle Projektionen stetig sind, konvergiert für jedes $f \in A$ das Netz

$$\{i(x_{j(\beta)})_f\}_{\beta\in\Gamma'}$$

in $[0, \| f \|]$ gegen $y_f = \gamma(f)$. Daher ist $\gamma \neq 0$ (denn eine Seminorm $\neq 0$ nimmt auf $a \in K$ den Wert $| a |$ an) und eine multiplikative Seminorm auf A. Also ist $\gamma \in \mathcal{M}(A)$. Da $i(x_{j(\beta)})_f = x_{j(\beta)}(f)$ ist, konvergiert das Teilnetz $\{x_{j(\beta)}\}_{\beta\in\Gamma'}$ in $\mathcal{M}(A)$ gegen γ. $\square$

Definition 5.8 *Es sei A eine $K-$affinoide Algebra. Wir nennen jeden beschränkten Ringhomomorphismus $\chi : A \to L$ in einem vollständigen, nicht-archimedischen Körper L einen nicht-archimedischen Charakter auf A. (χ heißt beschränkt, falls für alle $a \in A$ gilt $| \chi(a) |_L \leqq \| a \|$.)*

Zwei nicht-archimedische Charaktere $\chi_1 : A \to L_1$ und $\chi_2 : A \to L_2$ heißen äquivalent, falls es einen nicht-archimedischen Teilkörper $L \subset L_1 \cap L_2$ gibt, dessen Betrag die Einschränkung der Beträge auf L_1 und L_2 ist und einen nicht-archimedischen Charakter $\chi : A \to L$, der χ_1 und χ_2 nach Einbettung in L_1 beziehungsweise L_2 induziert.

Jeder nicht-archimedische Charakter $\chi : A \to L$ induziert die beschränkte, multiplikative Seminorm

$$\begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R}_{\geqq 0} \\ f & \mapsto & | \chi(f) |_L \end{array}$$

Da $\chi(1) = 1$ ist, ist diese Seminorm $\neq 0$. Sind zwei nicht-archimedische Charaktere äquivalent, so induzieren sie dieselbe Seminorm.

Proposition 5.9 *Dies liefert eine Bijektion zwischen $\mathcal{M}(A)$ und der Menge der Äquivalenzklassen von nicht-archimedischen Charakteren auf A.*

Beweis : Wir geben eine Umkehrabbildung zu obiger Konstruktion an. Sei $\gamma : A \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$ eine multiplikative Seminorm $\neq 0$ auf A. Dann ist Kern $\gamma \subset A$ ein Primideal (Übungsaufgabe).

Die Abbildung γ induziert eine multiplikative Norm

$$\overline{\gamma} : A/ \text{ Kern } \gamma \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$$

auf dem Integritätsring $A/$Kern γ. Wir setzen diese multiplikativ zu einer multiplikativen Norm (also einem Betrag) auf dem Quotientenkörper Quot($A/$Kern γ) fort. Es sei $\mathcal{H}(\gamma)$ die Komplettierung von Quot($A/$Kern γ) nach diesem Betrag. Dann ist

$$\chi : A \to A/\text{Kern } \gamma \hookrightarrow \mathcal{H}(\gamma)$$

ein nicht-archimedischer Charakter auf A mit $| \chi(a) | = \gamma(a)$ für alle $a \in A$. Die Beschränktheit von χ folgt aus der Beschränktheit von γ. $\square$

Proposition 5.10 *Sei A eine $K-$affinoide Algebra. Für jedes $f \in A$ gilt dann*

$$\rho(f) = \max_{\gamma \in \mathcal{M}(A)} \gamma(f).$$

Beweis : Die Seminorm ρ ist definiert als $\rho(f) = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| f^n \|}$.

Da jedes $\gamma \in \mathcal{M}(A)$ beschränkt und multiplikativ ist, gilt

$$\gamma(f) = \sqrt[n]{\gamma(f^n)} \leqq \sqrt[n]{\| f^n \|}$$

für alle n, woraus $\gamma(f) \leqq \rho(f)$ folgt. Also ist $\sup\limits_{\gamma \in \mathcal{M}(A)} \gamma(\rho) \leqq \rho(f)$. Um die andere Ungleichung zu zeigen, nehmen wir an, dass für alle $\gamma \in \mathcal{M}(A)$ gilt $\gamma(f) < r$ und zeigen $\rho(f) < r$. Dazu betrachten wir $B = A\{r\ x\}$. Aus $\| x \|_B = r^{-1}$ folgt $\gamma(x) \leqq r^{-1}$ für alle $\gamma \in \mathcal{M}(B)$. Also folgt $\gamma(fx) < 1$.

Daher ist $\gamma(1 - fx) = 1$ für alle $\gamma \in \mathcal{M}(B)$. Falls es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ gäbe, das $(1 - fx)$ enthält, so würde jedes Element in $\mathcal{M}(B/\mathfrak{m}) \neq \emptyset$ ein $\gamma \in \mathcal{M}(B)$ induzieren, das auf $(1 - fx)$ verschwindet. Also liegt $1 - fx$ in keinem maximalen Ideal von B. Daher ist das Hauptideal $(1 - fx) = B$, also $1 - fx$ invertierbar in B.

Daher ist $\sum\limits_{n \geqq 0} f^n x^n$ in B, also gilt $\| \ f^n \ \| \ r^{-n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Daraus folgt $\rho(f) r^{-1} = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| f^n \|} \sqrt[n]{r^{-n}} < 1$, also $\rho(f) < r$.

Daraus folgt $\rho(f) \leqq \sup\limits_{\gamma \in \mathcal{M}(A)} \gamma(f)$. Angenommen $r = \sup\limits_{\gamma \in \mathcal{M}(A)} r(f) > \gamma(f)$ für alle $\gamma \in \mathcal{M}(A)$. Dann folgte $r > \rho(f)$ im Widerspruch zu $\rho(f) \leqq r$.

Also wird das Supremum tatsächlich angenommen. □

Wir wollen nun zeigen, dass das Berkovich-Spektrum affinoider Algebren funktoriell ist.

Lemma 5.11 *Sind A, B $K-$affinoide Algebren und $\varphi : A \to B$ ein $K-$Algebrenhomomorphismus, so ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\varphi) : \mathcal{M}(B) &\to \mathcal{M}(A) \\ \gamma &\mapsto \gamma \circ \varphi \end{aligned}$$

stetig.

Beweis : Wir müssen zunächst zeigen, dass $\mathcal{M}(\varphi)$ wohldefiniert ist. Dazu sei $\gamma \in \mathcal{M}(B)$. Dann ist $\gamma \circ \varphi$ eine multiplikative Seminorm $\neq 0$ auf A. Aus Proposition 5.10 folgt, dass für alle $f \in A$ gilt $\rho\big(\varphi(f)\big) \leqq \rho(f)$. Mit Hilfe der Übungsaufgabe am Ende von Kapital 4 folgt daraus, dass $\varphi : A \to B$ beschränkt ist (das heißt, es gibt ein $C > 0$ mit $\| \varphi(a) \|_B \leqq C \| a \|_A$ für alle $a \in A$).

Daraus folgt, dass für eine beschränkte Seminorm γ auf B auch die Seminorm $\gamma \circ \varphi$ auf A beschränkt ist. Somit ist $\mathcal{M}(\varphi)$ wohldefiniert. Für jedes $f \in A$ ist

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}(B) & \to & \mathcal{M}(A) & \to & \mathbb{R} \\ \gamma & \mapsto & \gamma \circ \varphi & \mapsto & \gamma\big(\varphi(f)\big) \end{array}$$

nach Definition der Topologie auf $\mathcal{M}(B)$ stetig. Daraus folgt die Stetigkeit von $\mathcal{M}(\varphi)$. $\square$

Es sei A eine beliebige strikt $K-$affinoide Algebra und $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal. Dann existiert definitionsgemäß eine surjektive Abbildung $\alpha : T_n \to A$. Nach Lemma 4.16 ist $A/\mathfrak{m}$ eine endliche Körpererweiterung von K. Auf diese Körpererweiterung können wir den Betrag auf K nach Satz 2.15 eindeutig fortsetzen. Die Abbildung

$$\gamma_{\mathfrak{m}} : A \longrightarrow A/\mathfrak{m} \xrightarrow{| \; |} \mathbb{R}$$

ist eine multiplikative, beschränkte Seminorm $\neq 0$ auf A. Wir haben sie am Ende von Kapitel 4 schon in einer Übungsaufgabe kennengelernt. Wir bezeichnen mit Max (A) die Menge der maximalen Ideale in A.

Lemma 5.12 *Sei A strikt $K-$affinoid. Die Abbildung*

$$i : Max\ (A) \longrightarrow \mathcal{M}(A)$$

ist injektiv. Das Bild von i liegt dicht in $\mathcal{M}(A)$.

Beweis : Ist $\gamma_{\mathfrak{m}} = \gamma_{\mathfrak{m}'}$, so folgt $\mathfrak{m} =$ Kern $\gamma_{\mathfrak{m}} =$ Kern $\gamma_{\mathfrak{m}'} = \mathfrak{m}'$, also ist i injektiv. Es bleibt zu zeigen, dass jede offene Teilmenge U von $\mathcal{M}(A)$ ein Element aus Bild (i) enthält. Wir können annehmen, dass

$$\emptyset \neq U = \{\gamma \in \mathcal{M}(A) : \gamma(f_i) < a_i, \gamma(g_j) > b_j \text{ für alle } i = 1, \ldots, n \text{ und } j = 1, \ldots, n\}$$

für geeignete $f_i, g_j \in A$ und $a_i, b_j \in \sqrt{| K^* |} \subset \mathbb{R}_{>0}$ gilt. Die Algebra $B = A\{a^{-1}f, bg^{-1}\}$ ist dann ebenfalls strikt $K-$affinoid und nicht 0. Also enthält sie ein maximales Ideal.

Das Urbild dieses maximalen Ideals unter dem Homomorphismus

$$A \longrightarrow B$$

strikt $K-$affinoider Algebren ist ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ in A nach Proposition 4.21. Dann liegt $\gamma_{\mathfrak{m}}$ in U. $\square$

Wir betrachten nun für jedes $r \in \mathbb{R}^n_{\geqq 0}$ die Einschränkungsabbildung

$$(*) \quad \begin{array}{rcl} \mathcal{M}(T_{n,r}) & \to & \{\gamma : K[x] \to \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ multiplikative Seminorm, die } |\ \ |_K \text{ fortsetzt}\} \\ \gamma & \mapsto & \gamma\,|_{K[x]}\ . \end{array}$$

Da für jede multiplikative Seminorm $\neq 0$ auf $T_{n,r}$ gilt $\gamma(1) = 1$, folgt $\gamma(a \cdot 1) = \mid a \mid$ für alle $a \in K$. Also setzt γ den Betrag auf K fort.

Lemma 5.13 *Die Einschränkungsabbildung* $(*)$ *ist injektiv.*

Beweis : Es sei $\gamma \in \mathcal{M}(T_{n,r})$ und $f \in T_{n,r}$ mit $\gamma(f) \neq 0$. Es gibt eine Folge von Polynomen $f_k \in K[x]$ mit $f_k \to f$ in der Banachnorm, also $\| f - f_k \|_r \underset{k\to\infty}{\to} 0$. Für $n \geqq n_0$ gelte $\| f - f_k \|_r < \gamma(f)$. Dann folgt $\gamma(f - f_k) \leqq \| f - f_k \|_r < \gamma(f)$, also $\gamma(f_k) = \gamma(f)$. Insbesondere gilt $\gamma(f_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \gamma(f)$.

Ist $\gamma(f) = 0$, so betrachten wir wieder eine Folge von Polynomen $f_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$. Dann ist $\gamma(f - f_k) \leqq \| f - f_k \|_r \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Falls $\gamma(f_k) \neq 0$ ist, folgt aufgrund der nicht-archimedischen Dreiecksungleichung $\gamma(f - f_k) = \gamma(f_k)$. Also gilt $\gamma(f_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 = \gamma(f)$.

Jetzt ist die Injektivität klar: Stimmen γ_1 und γ_2 aus $\mathcal{M}(T_{n,r})$ auf $K[x]$ überein, dann durch Grenzübergang auch auf $T_{n,r}$. $\square$

Es sei $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$. Für $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$ schreiben wir $s \leqq r$, falls $s_i \leqq r_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt. Die natürliche Einbettung

$$T_{n,r} \hookrightarrow T_{n,s}$$

für $0 < s \leqq r$ liefert eine stetige Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{rs} : \mathcal{M}(T_{n,s}) & \to & \mathcal{M}(T_{n,r}) \\ \gamma & \mapsto & \gamma\,|_{T_{n,r}} \end{array}$$

nach Lemma 5.11.

Die Abbildung $\varphi_{r,s}$ ist injektiv nach Lemma 5.13, denn der Polynomring $K[x]$ ist in allen $T_{n,r}$ enthalten. Sie ist sogar ein Homöomorphismus von $\mathcal{M}(T_{n,s})$ auf das Bild $(\varphi_{r,s})$ (Übungsaufgabe), das eine offene Teilmenge von $\mathcal{M}(T_{n,r})$ ist. Wir wollen jetzt alle $\mathcal{M}(T_{n,r})$ für $r \in \mathbb{R}^n_{>0}$ verkleben.

Definition 5.14 *(Verkleben topologischer Räume) Sei I eine gerichtete Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei ein topologischer Raum X_i gegeben. Für jedes $j \neq i$ sei ferner eine offene Teilmenge $U_{ij} \subset X_i$ (möglicherweise leer) gegeben. Für alle $i \neq j$ existiere ferner ein Homöomorphismus*

$$\begin{array}{cccc} \varphi_{ij}: & U_{ij} & \xrightarrow{\sim} & U_{ji}, \\ & \cap & & \cap \\ & X_i & & X_j \end{array}$$

so dass gilt:

i) $\varphi_{ij} = \varphi_{ij}^{-1}$

ii) Für paarweise verschiedene i, j, k ist $\varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$ und $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ auf $U_{ij} \cap U_{ik}$.

Dann gibt es einen topologischen Raum X und stetige Abbildungen $\psi_i : X_i \longrightarrow X$, so dass

i) jedes ψ_i ein Homöomorphismus von X_i auf sein Bild $\psi_i(X_i)$ ist,

ii) $X = \bigcup_i \psi_i(X_i)$,

iii) $\psi_i(X_i) \cap \psi_j(X_j) = U_{ij}$ *und*

iv) $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$ *auf* U_{ij}

gilt.

Beweis : Wir definieren X als Quotienten der disjunkten Vereinigung $\dot{\bigcup}_{i \in I} X_i$ nach der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \Leftrightarrow x \in U_{ij} \subset X_i, y \in U_{ji} \subset X_j \text{ für } i \neq j \text{ und } \varphi_{ij}(x) = y.$$

Wir statten X mit der Quotiententopologie aus und definieren $\psi_i : X_i \hookrightarrow \dot{\bigcup}_{i \in I} X_i \to X$ als Komposition der kanonischen Einbettung nach $\dot{\bigcup}_{i \in I} X_i$ mit der Quotientenabbildung. Das leistet das Verlangte. $\square$

Nun betrachten wir alle $\big(\mathcal{M}(T_{n,r})\big)_{r\in\mathbb{R}^n_{>0}}$ und verkleben sie mit Hilfe der Abbbildungen $\varphi_{r,s} : \mathcal{M}(T_{n,s}) \hookrightarrow \mathcal{M}(T_{n,r})$ für $s \leqq r$. Wir erhalten einen topologischen Raum, der alle $\mathcal{M}(T_{n,r})$ enthält.

Lemma 5.15 *Es sei* $(\mathbb{A}^n_K)^{an} = \{\gamma : K[x] \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$ *multiplikative Seminorm, die* $| \ \ |_K$ *fortsetzt*$\}$ *mit der gröbsten Topologie, die alle Auswertungsabbildungen* $\gamma \mapsto \gamma(f)$ *für* $f \in K[x]$ *stetig macht.*

Dann ist $(\mathbb{A}^n_K)^{an}$ *homöomorph zu dem topologischen Raum, der durch Verkleben aller* $\mathcal{M}(T_{n,r})$ *entsteht.*

Beweis : Nach Lemma 5.13 haben wir eine natürliche injektive Abbildung

$$i_r : \mathcal{M}(T_{n,r}) \longrightarrow (\mathbb{A}^n_K)^{an}$$

für jedes $r \in \mathbb{R}^n_{>0}$. Nach Definition der Topologie auf $(\mathbb{A}^n_K)^{an}$ ist i_r ein Homöomorphismus auf sein Bild. Offenbar ist für $s \leqq r$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(T_{n,s}) \arrow[rr, hook, "\varphi_{r,s}"] \arrow[dr, "i_s"'] & & \mathcal{M}(T_{n,r}) \arrow[dl, "i_r"] \\ & (\mathbb{A}^n_K)^{an} & \end{tikzcd}$$

kommutativ.

Es sei $\gamma \in (\mathbb{A}^n_K)^{an}$ eine beliebige multiplikative Seminorm, die $| \ \ |_K$ fortsetzt. Dann sei $r_1 = \gamma(x_1), \ldots, r_n = \gamma(x_n)$. Für $r = (r_1, \ldots, r_n)$ können wir γ dann zu einer multiplikativen Seminorm auf $\mathcal{M}(T_{n,r})$ fortsetzen, indem wir für jedes $f = \sum\limits_I a_I x^I \in T_{n,r}$ die Folge $f_K = \sum\limits_{|I|\leqq k} a_I x^I$ in $K[x]$ betrachten. Ist die Folge $\big(\gamma(f_k)\big)_{k\geqq 0}$ in $\mathbb{R}$ eine Nullfolge, so setzen wir $\gamma(f) = 0$.

Ansonsten existiert ein $\varepsilon > 0$ und ein k_0 mit $\gamma(f_{k_0}) > \varepsilon$ und $\gamma(a_I x^I) =\mid a_I \mid r^I < \varepsilon$ für alle $\mid I \mid > k_0$. Daraus folgt für alle $l \geqq k_0$

$$f_l = f_{k_0} + \sum_{k_0<|I|\leqq l} a_I x^I,$$

also $\gamma(f_l) = \gamma(f_{k_0})$. Also wird $\big(\gamma(f_k)\big)_{k\geqq 0}$ stationär und wir definieren $\gamma(f) = \lim\limits_{h\to\infty} \gamma(f_k)$. Dies liefert eine multiplikative, beschränkte Seminorm auf $T_{n,r}$, die die gegebene Seminorm auf $K[x]$ fortsetzt.

Also ist $(\mathbb{A}^n_K)^{an}$ in der Tat homöomorph zu dem topologischen Raum, der durch Verkleben aller $\mathcal{M}(T_{n,r})$ entsteht (Übungsaufgabe). $\square$

Der Raum $(\mathbb{A}_K^n)^{an}$ ist der „analytifizierte affine Raum über K“.

Wir haben eine natürliche Einbettung

$$\begin{array}{rcl} K^n & \hookrightarrow & (\mathbb{A}_K^n)^{an} \\ a = (a_1, \ldots, a_n) & \longmapsto & \big(f \mapsto \mid f(a) \mid_K \big). \end{array}$$

Ferner haben wir eine „Tropikalisierungsabbildung“

$$\begin{array}{rcl} t : (\mathbb{A}_K^n)^{an} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n_{\geqq 0} \\ \gamma & \longmapsto & \big(\gamma(x_1), \ldots, \gamma(x_n)\big), \end{array}$$

die von den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ abhängt. Die Abbildung t ist surjektiv und stetig, aber nicht injektiv. Sie hat einen kanonischen Schnitt

$$s : \mathbb{R}^n_{\geqq 0} \longrightarrow (\mathbb{A}_K^n)^{an},$$

der ein Tupel $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n_{\geqq 0}$ auf die multiplikative Seminorm

$$s(w) : \sum_I a_I x^I \mapsto \max \mid a_I \mid w^I$$

abbildet.

(Dass s ein Schnitt von r ist, bedeutet einfach, dass $r \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n_{\geqq 0}}$ gilt.)

Die Abbildung s ist stetig, denn die Komposition mit jeder Auswertungsabbildung an einem $f \in K[x]$ ist stetig.

Das Bild von s ist abgeschlossen in $(\mathbb{A}_K^n)^{an}$. Ist nämlich $\gamma_0 \in (\mathbb{A}_K^n)^{an}$ nicht im Bild, so setzen wir $w_i = \gamma(x_i)$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann gibt es ein $f = \sum\limits_I a_I x^I \in K[x]$ mit $s(w)(f) \neq \gamma(f)$. Da $\gamma_0(a_I x^I) = \mid a_I \mid \gamma(x^I) = \mid a_I \mid w^I$, muss es aufgrund der nicht-archimedischen Dreiecksungleichung zwei verschiedene Indizes I und J geben mit $\gamma_0(f) < \gamma_0(a_I x^I) = \gamma_0(a_J x^J)$.

Es ist $\gamma_0(a_I x^I) = \mid a_I \mid w^I = s(w)(a_I x^I)$ und $\gamma_0(a_J x^J) = \mid a_J \mid w^J = s(w)(a_J x^J)$.

Es sei $\varepsilon > 0$ mit

$$\begin{array}{rcl} \gamma_0(f) + \varepsilon & < & \mid a_I \mid w^I \quad \text{und} \\ \gamma_0(f) + \varepsilon & < & \mid a_J \mid w^J. \end{array}$$

Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $w' = (w'_1, \ldots, w'_n)$ mit $\mid w_i - w'_i \mid < \delta$ für alle $i - 1, \ldots, n$ gilt: $\mid a_I \mid w'^I > \gamma_0(f) + \varepsilon$ und $\mid a_J \mid w'^J > \gamma_0(f) + \varepsilon$. Nun betrachten wir

$$V = \{\gamma \in X : \gamma(f) < \gamma_0(f) + \varepsilon, \mid \gamma(x_i) - \gamma_0(x_i) \mid < \delta \text{ für alle } i = 1, \dots, n\}.$$

V ist definitionsgemäß offen in $(\mathbb{A}_K^n)^{an}$, enthält γ_0 und ist disjunkt vom Bild der Abbildung s. Also ist das Bild von s abgeschlossen in $(\mathbb{A}_K^n)^{an}$.

Ist U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}_{\geqq 0}^n$, so ist

$$s(U) = \big\{\gamma : \big(\gamma(x_1), \dots, \gamma(x_n)\big) \in U\big\} \cap \text{ Bild } (s).$$

Also ist $s(U)$ relativ offen in Bild (s).

Wir haben also gezeigt, dass

$$s : \mathbb{R}_{\geqq 0} \longrightarrow (\mathbb{A}_K^n)^{an}$$

ein Homöomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge von $(\mathbb{A}_K^n)^{an}$ ist.

Wir wollen nun zeigen, dass $S = s(\mathbb{R}_{\geqq 0}^n)$ sogar ein starker Deformationsretrakt von $(\mathbb{A}_K^n)^{an}$ ist.

Definition 5.16 *Sei X ein topologischer Raum and $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann heißt A Deformationsretrakt von X, falls es eine stetige Abbildung*

$$h : X \times [0, 1] \to X$$

gibt mit $h(x, 0) = x$ für alle $x \in X, h(x, 1) \in A$ für alle $x \in X$ und $h(a, 1) = a$ für alle $a \in A$. Mit anderen Worten, h ist eine Homotopie zwischen der Identität auf X und der Retraktionsabbildung $h(-, 1)$, die A festlässt und X nach A abbildet.

Gilt zusätzlich $h(a, t) = a$ für alle $t \in (0, 1)$, so heißt A starkes Deformationsretrakt von X.

Satz 5.17 *S ist ein starkes Deformationsretrakt von $(\mathbb{A}_K^n)^{an}$.*

Beweis : Für jedes $f = \sum a_I x^I \in K[x]$ und alle $J \in \mathbb{N}_0^n$ betrachten wir das Polynom

$$\partial_J f(x) = \sum_{I \in \mathbb{N}_0^n} \binom{I + J}{J} a_{I+J} x^I,$$

wobei der Binomialkoeffizient $\binom{I+J}{J}$ definiert ist als $\prod\limits_{k=1}^{n} \binom{i_k + j_k}{j_k}$ für $I = (i_1, \dots, i_n)$ und $J = (j_1, \dots, j_n)$.

Offenbar ist $\partial_J f = (j_1)! \dots (j_n)! \Big(\frac{\partial}{j_{x_1}}\Big)^{j_1} \dots \Big(\frac{\partial}{j_{x_n}}\Big)^{j_n} f(x)$. Es sei $\gamma \in (\mathbb{A}_K^n)^{an}$ mit $\gamma(x_1) = r_1, \dots, \gamma(x_n) = r_n$. Für alle $t \in [0,1]$ definieren wir dann eine Seminorm $\Phi(\gamma, t)$ durch

$$\Phi(\gamma, t) : \sum_I a_I x^I \mapsto \max_J \{\gamma(\partial_J f)(tr)^J\},$$

wobei $r = (r_1, \dots, r_n)$, also $tr = (tr_1, \dots, tr_n)$ ist.

$\Phi(\gamma, t)$ ist eine multiplikative Seminorm auf $K[x]$, die $|\quad|_K$ fortsetzt (Übungsaufgabe), also ein Element in $(\mathbb{A}_K^n)^{an}$. Das liefert eine Abbildung

$$\Phi : (\mathbb{A}_K^n)^{an} \times [0,1] \to (\mathbb{A}_K^n)^{an}.$$

Für jedes $f \in K[x]$ ist $\partial_J f$ nur für endlich viele J nicht Null. Also läuft das Maximum in der Definition von $\Phi(\gamma, t)(f)$ über endlich viele Terme. Da alle $\gamma \mapsto \gamma(\partial_J f)$ stetig auf $(\mathbb{A}_K^n)^{an}$ sind, ist auch

$$\begin{array}{rcl} (\mathbb{A}_K^n)^{an} \times [0,1] & \to & \mathbb{R}, \\ (\gamma, t) & \mapsto & \Phi(\gamma, t)(f) \end{array}$$

stetig. Also ist Φ stetig.

Ist $r = 0$, so ist $\Phi(\gamma, t) = \gamma(f)$ für alle $t \in [0,1]$. Aus der Tatsache, dass $\gamma(x_i) = r_i = 0$ ist für alle i, folgt $\gamma(\sum\limits_I a_I x^I) = \mid a_{(0,\dots,0)} \mid$.

Also ist $\gamma = s(0, \dots, 0) \in S$.

Ist $r \neq 0$, so ist $\Phi(\gamma, 0) = \gamma$, denn $(tr)^J = 0$, falls $J \neq (0, \dots, 0)$ ist.

Außerdem ist $\Phi(\gamma, 1) = \max\limits_J \gamma(\partial_J f) r^J$. Wir zeigen nun, dass $\Phi(\gamma, 1) = s(r_1, \dots, r_n)$ gilt. Für $f = \sum\limits_I a_I x^I \in K[x]$ ist also zu zeigen

$$\max_J \{\gamma(\partial_J f) r^J\} = \max_I \mid a_I \mid r^I.$$

Die Ungleichung $\leqq$ folgt sofort aus der nicht-archimedischen Dreiecksungleichung. Wir zeigen $\geqq$. Dazu sei $\mid a_{I_0} \mid r^{I_0} = \max\limits_I \mid a_I \mid r^I$ und $\mid a_I \mid r^I < \mid a_{I_0} \mid r^{I_0}$ für alle $I > I_0$, wobei diese Relation komponentenweise für alle Einträge gemeint ist.

Dann gilt $\partial_{I_0} f(x) = \sum\limits_{I \in \mathbb{N}_0^n} \binom{I+I_0}{I_0} a_{I+I_0} x^I$. Der Summand für $I = (0, \dots, 0)$ ist a_{I_0}, also gilt für alle $I \in \mathbb{N}_0^n \backslash \{0, \dots, 0\}$:

$$\begin{array}{rcl} \gamma(a_{I_o}) & = & \mid a_{I_0} \mid \frac{r^{I_0}}{r^{I_0}} > \mid a_{I+I_0} \mid \frac{r^{I+I_0}}{r^{I_0}} \\ & = & \gamma(a_{I+I_0} x^I) \\ & \geqq & \gamma\Big(\binom{I+I_0}{I_0} a_{I+I_0} x^I\Big). \end{array}$$

Mit der nicht-archimedischen Dreiecksungleichung folgt

$$\gamma(\partial_{I_0} f) = \gamma(a_{I_0}) = \mid a_{I_0} \mid .$$

Also ist

$$\max_J \{\gamma(\partial_J f) r^J\} \geqq \gamma\big(\partial_{I_0}(f)\big) r^{I_0} = \mid a_{I_0} \mid r^{I_0},$$

woraus die gewünschte Ungleichung folgt.

Somit ist $\Phi(\gamma, 0) = \gamma$ für alle $\gamma \in (\mathbb{A}_K^n)^{an}$ und $\Phi(\gamma, 1) = s\big(\gamma(x_1), \ldots, \gamma(x_n)\big) \in S$ für alle $\gamma \in (\mathbb{A}_K^n)^{an}$.

Also ist S ein Deformationsretrakt von $(\mathbb{A}_K^n)^{an}$. Ferner prüft man leicht nach, dass für alle $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_{\geqq 0}$ gilt

$$\Phi\big(s(r), t\big) = s(r)$$

für alle $t \in [0, 1]$. Also ist S ein starkes Deformationsretrakt von $(\mathbb{A}_K^n)^{an}$. $\square$

Definition 5.18 *Es sei A eine $K-$affinoide Algebra. Eine Teilmenge $U \subset \mathcal{M}(A)$ heißt affinoider Teilbereich, falls es einen Homomorphismus K affinoider Algebren*

$$\varphi : A \to A_U$$

gibt, so dass die zugehörige stetige Abbildung

$$\mathcal{M}(\varphi) : \mathcal{M}(A_U) \to \mathcal{M}(A)$$

folgende Eigenschaften hat.

i) $\mathcal{M}(\varphi)$ bildet $\mathcal{M}(A_U)$ nach U ab.

ii) Für jeden Homomorphismus $K-$affinoider Algebren

$$\psi : A \to B$$

mit $\mathcal{M}(\psi)\big(\mathcal{M}(B)\big) \subset U$ gibt es genau einen Homomorphismus

$$\psi' : A_U \to B$$

mit

$$\psi = \psi' \circ \varphi.$$

Aus der Eindeutigkeitsbedingung folgt, dass die Algebra A_U bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmt ist.

Beispiel: Sei A eine $K-$affinoide Algebra und $X = \mathcal{M}(A)$.

1) Für $f = (f_1, \dots, f_n)$ mit $f_i \in A$ und $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$ ist

$$X(p^{-1}f) = \{\gamma \in \mathcal{M}(A) : \gamma(f_i) \leqq p_i \text{ für alle } i = 1, \dots, n\}$$

ein affinoider Teilbereich von $X = \mathcal{M}(A)$. Er wird von dem $K-$Algebrenhomomorphismus

$$\varphi : A \to A\{p^{-1}f\}$$

dargestellt, wobei $A\{p^{-1}f\} = A\{p^{-1}x\}/(x_i - f_i : i = 1, \dots, n)$ ist (siehe Definition 4.23).

Die Abbildung

$$\mathcal{M}(\varphi) : \mathcal{M}(A\{p^{-1}f\}) \to \mathcal{M}(A)$$

bildet eine Seminorm γ auf $A\{p^{-1}f\}$ auf $\gamma \circ \varphi : A \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$ ab. Die affinoide Algebra $A\{p^{-1}f\}$ trägt die Quotientennorm via $A\{p^{-1}x\} \to A\{p^{-1}f\}$. Da in $A\{p^{-1}x\}$ gilt $\| x_i \| = p_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, folgt $\| f_i \| \leqq p_i$ in $A\{p^{-1}f)$.

Also gilt für alle $\gamma \in \mathcal{M}(A\{p^{-1}f\})$ ebenfalls $\gamma(f_i) \leqq p_i$ und somit ist $\gamma \circ \varphi$ in $X(p^{-1}f)$.

Also bildet $\mathcal{M}(\varphi)$ den Raum $\mathcal{M}(A\{p^{-1}f\})$ nach $X(p^{-1}f)$ ab. Damit ist i) in Definition 5.18 erfüllt. Für ii) betrachten wir einen Homomorphismus $\psi : A \to B$ von $K-$affinoiden Algebren mit $\mathcal{M}(\psi)\big(\mathcal{M}(B)\big) \subset X(p^{-1}f)$. Also gilt für alle $\gamma \in \mathcal{M}(B)$, dass $\gamma \circ \psi(f_i) \leqq p_i$ ist für $i = 1, \dots, n$.

Nach Proposition 5.10 folgt daraus

$$\rho\big(\psi(f_i)\big) \leqq p_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Mit Hilfe der Übungsaufgabe 7) am Ende von Kapitel 4 gibt es also genau einen stetigen $K-$Algebrenhomomorphismus $\Phi : A\{p^{-1}x\} \longrightarrow B$, der φ fortsetzt und x_i auf f_i abbildet.

Dieser faktorisiert also über einen eindeutig bestimmten $K-$Algebrenhomomorphismus

$$\psi' : A\{p^{-1}f\} \longrightarrow B,$$

der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr] & & B \\ & A\{p^{-1}f\} \arrow[ur, "\psi'"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Jeder affinoide Teilbereich der Form $X(p^{-1}f)$ in $X = \mathcal{M}(A)$ heißt Weierstraßbereich in X.

2) Analog zeigt man, dass für $f = (f_i, \ldots, f_n)$, $g = (g_1, \ldots, g_m)$ mit $f_i \in A$ und $g_j \in A$ sowie $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$ und $q = (q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{R}^m_{>0}$ die Teilmenge $X(p^{-1}f, qg^{-1}) = \{\gamma \in X : \gamma(f_i) \leqq p_i$ für alle $i = 1, \ldots, n, \gamma(g_i) \geqq q_i$ für alle $j = 1, \ldots, m\}$ ein affinoider Teilbereich von X ist.

Er wird von dem $K-$Algebrenhomomorphismus

$$\varphi : A \to A\{(p^{-1}f, qg^{-1})\}$$

aus Definition 4.23 dargestellt. Affinoide Teilbereiche von dieser Form heißen Laurentbereiche.

Übungsaufgabe 35 *Ist $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus affinoider $K-$Algebren, so hat die zugehörige Abbildung $\mathcal{M}(\varphi) : \mathcal{M}(B) \to \mathcal{M}(A)$ die Eigenschaft, dass Urbilder von Weierstraß- bzw. Laurentbereichen wieder Weierstraß- bzw. Laurentbereiche sind.*

Übungsaufgabe 36 *Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage. Die Quotientenabbildung $\varphi : T_2 \longrightarrow T_1$ macht $\mathcal{M}(T_1) \hookrightarrow \mathcal{M}(T_2)$ zu einem affinoiden Teilbereich von $\mathcal{M}(T_2)$.*

Lemma 5.19 *Sind U und V affinoide Teilbereiche in $X = \mathcal{M}(A)$, so ist auch $U \cap V$ ein affinoider Teilbereich.*

Beweis : Es seien $\varphi_1 : A \to A_U$ und $\varphi_2 : A \to A_V$ die Algebren-Homomorphismen zu U und V. Wir betrachten die $A-$Algebra $C = A_U \hat{\otimes}_A A_V$ zusammen mit der kanonischen Abbildung $\varphi : A \to C$. Da A_U und A_V $K-$affinoid sind, ist nach Korollar 4.19 auch C $K-$affinoid. Ist nun $\psi : A \to B$ ein Homomorphismus $K-$affinoider Algebren mit $\mathcal{M}(\psi)\big(\mathcal{M}(B)\big) \subset U \cap V$, so liefern die universellen Eigenschaften für U und V eindeutige Homomorphismen

$$\psi_1 : A_U \to B \text{ und } \psi_2 : A_V \to B$$

$$\text{mit } \psi = \psi_1 \circ \varphi_1 \text{ und } \psi = \psi_2 \circ \varphi_2.$$

Daher sind ψ_1 und $\psi_2 A-$ Algebrenhomomorphismen. Die universelle Eigenschaft von $C = A_U \hat{\otimes}_A A_V$ liefert also genau einen beschränkten $A-$Algebrenhomomorphismus

$$\Theta : C \longrightarrow B,$$

so dass

$$\begin{tikzcd} & A_U \arrow[dl] \arrow[dr, "\psi_1"] & \\ C \arrow[rr, "\Theta"] & & B \\ & A_V \arrow[ul] \arrow[ur, "\psi_2"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Da

$$\begin{tikzcd} & A_U \arrow[d] \arrow[dr, "\psi_1"] & \\ A \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & C \arrow[r, "\Theta"] & B \\ & A_V \arrow[u] \arrow[ur, "\psi_2"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, folgt $\psi = \psi_1 \circ \varphi_1 = \Theta \circ \varphi$. Daraus folgt die Behauptung. □

Ist $V \subset \mathcal{M}(A)$ ein affinoider Teilbereich mit Algebrahomomorphismus $\varphi : A \to A_V$, so bildet $\mathcal{M}(\varphi)$ den Raum $\mathcal{M}(A_V)$ definitionsgemäß nach $V \subset \mathcal{M}(A)$ ab.

Lemma 5.20 *Diese Abbildung ist injektiv.*

Beweis : Wir nehmen zunächst an, dass A und A_V strikt $K-$affinoid sind.

Nach Lemma 5.12 ist also Max(A) dicht in $\mathcal{M}(A)$. Jedes $p \in$ Max$(A) \cap V$ ist von der Form

$$p : A \to L \xrightarrow{|\ |_L} \mathbb{R}_{\geqq 0}$$

für eine endliche Körpererweiterung von L. Da $\mathcal{M}(L)$ $K-$affinoid ist, folgt aus der universellen Eigenschaft von $\mathcal{M}(A_V)$, dass es einen eindeutigen Homomorphismus $A_V \to L$ gibt, so dass p als $A \to A_L \to L \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$ faktorisiert. Daher ist Max$(A) \cap V \subset$ Bild$\big(\mathcal{M}(\varphi)\big)$, und die Abbildung

$$\mathcal{M}(\varphi) : \text{Max}(A_V) \longrightarrow \text{Max}(A)$$

ist injektiv.

Sind nun $p \neq q$ zwei Punkte in $\mathcal{M}(A_V)$, so können wir diese durch geeignete Laurentbereiche $W_1 \subset \mathcal{M}(A_V)$ und $W_2 \subset \mathcal{M}(A_V)$ trennen. Diese sind ebenfalls strikt $K-$affinoid. $\mathcal{M}(\varphi)(W_1)$ und $\mathcal{M}(\varphi)(W_2)$ sind dann affinoide Teilbereiche von $\mathcal{M}(A)$, denn man zeigt leicht, dass sie die universelle Eigenschaft erfüllen. Sind A_{W_1} und A_{W_2} die zugehörigen affinoiden Algebren, so folgt aus $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ in $\mathcal{M}(A_V)$, dass $\mathcal{M}(\varphi)\big(\text{Max}(A_{W_1}\big) \cap \mathcal{M}(\varphi)\big(\text{Max}(A_{W_2})\big) = \emptyset$ ist. Nun ist $\mathcal{M}(\varphi)(W_1) \cap \mathcal{M}(\varphi)(W_2) = \mathcal{M}(A_{W_1} \hat{\otimes}_A A_{W_2})$ nach Lemma 5.19. Die Algebra $A_{W_1} \hat{\otimes}_A A_{W_2}$ kann aber keine maximalen Ideale haben, also ist sie 0 und $\mathcal{M}(A_{W_1} \hat{\otimes}_A A_{W_2}) = \emptyset$. Somit ist auch $\mathcal{M}(\varphi)(p) \neq \mathcal{M}(\varphi)(q)$. Also ist $\mathcal{M}(\varphi)$ im strikt $K-$affinoiden Fall injektiv. Der allgemeine Fall folgt durch Basiswechsel mit einem geeigneten Erweiterungskörper K_r/K. □

Es gilt außerdem, dass für jeden affinoiden Teilbereich V mit $\varphi : A \to A_V$ die injektive Abbildung $\mathcal{M}(\varphi) : \mathcal{M}(A_V) \to \mathcal{M}(A)$ einen Isomorphismus $\mathcal{M}(A_V) \to V$ vermittelt.

Außerdem ist jeder strikt affinoide Teilbereich offen und kompakt in $\mathcal{M}(A)$, falls A strikt affinoid ist, siehe [Bo].

Proposition 5.21 *Jede abgeschlossene Teilmenge z in $X = \mathcal{M}(A)$, die eine offene Umgebung U eines Punktes $x_0 \in Z$ enthält, enthält auch einen Laurentbereich W um p.*

Beweis : Die offene Teilmenge U enthält eine Umgebung der Form

$$\{\gamma \in X : \gamma(f_i) < r_i, \gamma(g_j) > s_j \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ und } j = 1, \dots, m\}$$

für geeignete $r_1 > 0, s_j > 0$ und $f_i, g_j \in A$. Wir wählen $p_i, q_j \in \sqrt{K^*}$ mit $x_0(f_i) \leqq p_i < r_i$ und $x_0(g_j) \geqq q_j > s_j$.

Dann ist für $p = (p_1, \dots, p_n)$; $q = (q_1, \dots, q_m)$ sowie $f = (f_1, \dots, f_n)$ und $g = (g_1, \dots, g_m)$ die Teilmenge $V = X(p^{-1}f, qg^{-1}) \subset X$ ein strikt affinoider Laurentbereich mit

$$x_0 \in V \subset U.$$

□

Satz 5.22 *(Tate Azyklizität) Es seien $V_1, \dots, V_n$ endlich viele affinoide Teilbereiche in $X = \mathcal{M}(A)$ mit $X = V_1 \cup \ldots \cup V_n$. Mit $\varphi_i : A \to A_{V_i}$ bezeichnen wir die zugehörigen Algebrenhomomorphismen.*

Die Homomorphismen

$$\begin{array}{rcl} p_i : A_{V_i} & \longrightarrow & \prod\limits_{j=1}^{n} A_{V_i} \hat{\otimes}_A A_{V_j} \\ a & \longmapsto & (a \otimes 1)_{j=1,\ldots,n} \end{array}$$

$$\text{und} \quad \begin{array}{rcl} q_j : A_{V_j} & \longrightarrow & \prod\limits_{i=1}^{n} A_{V_i} \hat{\otimes}_A A_{V_j} \\ a & \longmapsto & (1 \otimes a)_{i=1,\ldots,n} \end{array}$$

vermitteln Produktabbildungen

$$p, q : \prod_{i=1}^{n} A_{V_i} \longrightarrow \prod_{i,j=1}^{n} A_{V_i} \hat{\otimes}_A A_{V_j}.$$

Dann ist folgende Sequenz exakt:

$$0 \longrightarrow A \overset{\varphi = \Pi\varphi_i}{\longrightarrow} \prod_{i=1}^{n} A_{V_i} \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j=1}^{n} A_{V_i} \hat{\otimes}_A A_{V_j},$$

das heißt,

i) φ ist injektiv und

ii) Bild $(\varphi) = \{a \in \prod\limits_{i=1}^{n} A_{V_i} : p(a) = q(a)\}$

Bevor wir diese Aussage in einem Spezialfall bezweifeln, wollen wir uns geometrisch verdeutlichen, was sie bedeutet.

Nach Lemma 5.19 ist

$$\mathcal{M}(A_{V_i}) \cap \mathcal{M}(A_{V_j}) \simeq \mathcal{M}(A_{V_i} \hat{\otimes}_A A_{V_j}).$$

Ordnen wir jedem affinoiden Teilbereich V in A die zugehörige Algebra A_V zu, so erhalten wir zu jeder Inklusion $V_1 \subset V_2$ von affinoiden Teilbereichen eine „Restriktionsabbildung“ $A_{V_2} \to A_{V_1}$ (mit Hilfe der universellen Eigenschaft).

Nach i) ist ein Element in A vollständig durch seine Einschränkung auf alle Algebren einer endlichen Überdeckung aus affinoiden Algebren festgelegt.

Nach ii) „verkleben“ sich Daten $(a_i \in A_{V_i})_{i=1,\ldots,n}$ genau dann zu einem $a \in A$, wenn für alle i und j die Einschränkungen von a_i und a_j auf den Schnitt, also $a_i \hat{\otimes} 1$ und $1 \hat{\otimes} a_j$ in $A_{V_i} \hat{\otimes}_A A_{V_j}$ übereinstimmen.

Das entspricht den Garbenaxiomen für eine offene Überdeckung.

Beweis : (von Satz 5.22) Wir geben aus Zeitmangel nur eine Skizze. Es genügt, die Behauptung für strikt affinoide Räume mit strikt affinoiden Überdeckungen zu zeigen (siehe [Ber1], Proposition 2.1.2).

Ein ausführlicher Beweis für diesen Fall findet sich in [Bo], § 4.3.

Mit Hilfe eines Satzes von Gerritzen-Grauert zeigt man, dass es genügt, die Behauptung für eine Laurent-Überdeckung von $X = \mathcal{M}(A)$ zu zeigen. Das ist eine Überdeckung der Form

$$\left\{X(f_1^{\alpha_1}, \ldots, f_r^{\alpha_r}) : \alpha_i \in \{+1, -1\}\right\}$$

für Elemente $f_1, \ldots, f_r \in A$.

Mit einem Induktionsargument führt man diesen Beweis auf den Fall $r = 1$ zurück.

Wir betrachten also für ein $f \in A$ die offene Überdeckung $X(f) \cup (f^{-1})$ von $X = \mathcal{M}(A)$. Es ist $X(f) = \mathcal{M}(A\{f\})$ und $X(f^{-1}) = \mathcal{M}(A\{f^{-1}\})$, wobei $A\{f\} = A\{x\}/(x - f)$ und $A\{f^{-1}\} = A\{y\}/(1 - yf)$ gilt.

Ferner ist $X(f) \cap X(f^{-1}) = \{\gamma \in \mathcal{M}(A) : \gamma(f) = 1\} = \mathcal{M}(A\{f, f^{-1}\})$, wobei $A\{f, f^{-1}\} = A\{x, x^{-1}\}/(x - f)$ mit $A\{x, x^{-1}\} = A\{x, y\}/(xy - 1)$ ist.

Die „Einschränkungsabbildungen“

$$A\{f\} \xrightarrow{p} A\{f, f^{-1}\} \text{ und } A\{f^{-1}\} \xrightarrow{q} A\{f, f^{-1}\}$$

sind die kanonischen Homomorphismen. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & (x-f)A\{x\} \times (A - fy)A\{y\} & \xrightarrow{\delta'} & (x-f)A\{x, x^{-1}\} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A\{x\} \times A\{y\} & \xrightarrow{\delta} & A\{x, x^{-1}\} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A\{f\} \times A\{f^{-1}\} & \xrightarrow{p-q} & A\{f, f^{-1}\} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Die Spalten dieses Diagramms sind offenbar exakt.

Die Abbildung δ ist gegeben als

$$\delta\big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n\big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n}.$$

Sie ist offenbar surjektiv mit Kern $\delta = \{(a_0, a_0) : a_0 \in A\}$. Also ist auch die mittlere Reihe des Diagramms exakt.

Mit δ ist auch δ' surjektiv. Durch eine Diagrammjagd folgt, dass die untere Reihe exakt ist. Das ist genau die Tate-Azyklität für die Überdeckung $\{X(f), X(f^{-1})\}$. $\square$

6 Globale analytische Räume

Nun wollen wir Berkovichs analytische Räume definieren. Sie sind in geeigneter Weise aus Spektren affinoider Algebren zusammengesetzt. Ein Beispiel für einen solchen Raum, nämlich $(\mathbb{A}_K^n)^{an}$, haben wir schon kennengelernt.

Definition 6.1 *Sei T ein topologischer Hausdorffraum. Ein Quasi-Netz auf T ist eine Familie τ von kompakten Teilmengen $V \subset X$, so dass jedes $x \in X$ eine (abgeschlossene) Umgebung der Form $V_1 \cup \ldots \cup V_n$ mit $V_i \in \tau$ und $x \in V_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ besitzt.*

Ein Quasi-Netz ist ein Netz, falls für alle $V, V' \in \tau$ die Familie

$$\{W \in \tau : W \subset V \cap V'\}$$

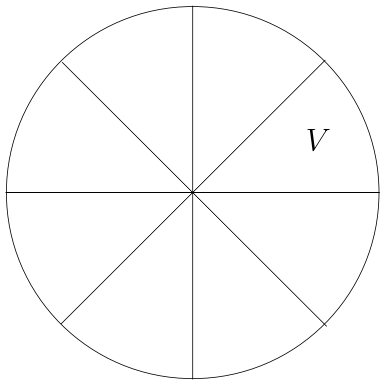
ein Quasi-Netz auf $V \cap V'$ ist.

Vorsicht: Dieser Begriff eines Netzes hat nichts mit den Netzen zu tun, die wir in Definition 5.5 kennengelernt haben! Wir behalten trotzdem diese auf Berkovich zurückgehende Terminologie bei, da sie auch in der Literatur verwendet wird.

Beispiel: Wir betrachten auf dem abgeschlossenen Einheitskreis $T \subset \mathbb{C}$ (mit der komplexen Topologie) eine beliebige Unterteilung in endlich viele Sektoren

und definieren τ als die Menge aller dieser abgeschlossenen Sektoren. Das ist ein Quasi-Netz auf T.

Es sei K ein vollständiger, nicht-archimedischer Körper mit einem nicht-trivialen Betrag.



Definition 6.2 *Es sei X ein topologischer Hausdorffraum zusammen mit einem Netz τ. Ein $K-$affinoider Atlas $\mathcal{A}$ auf X bezüglich τ ist eine Familie von affinoiden Algebren $\{\mathcal{A}_V\}_{V\in\tau}$ zusammen mit einem Homomorphismus*

$$V \simeq \mathcal{M}(A_V)$$

für alle $V \in \tau$, so dass es für alle $V, V' \in \tau$ mit $V' \subset V$ einen Homomorphismus affinoider Algebren

$$A_V \to A_{V'}$$

gibt, der V' zu einem affinoiden Teilbereich von V macht.

Jetzt können wir analytische Räume definieren.

Definition 6.3 *Ein $K-$analytischer Raum ist ein Tupel $(X, \tau, \mathcal{A})$, wobei X ein topologischer Hausdorffraum, τ ein Netz auf X und $\mathcal{A}$ ein $K-$affinoider Atlas bezüglich τ ist.*

Falls alle A_V strikt $K-$affinoide Algebren sind, so ist $(X, \tau, \mathcal{A})$ ein strikt $K-$affinoider Raum.

Wir schreiben oft einfach X statt $(X, \tau, \mathcal{A})$.

Beispiel: 1) Der analytische affine Raum $(\mathbb{A}^n_K)^{an}$ ist ein $K-$analytischer Raum mit dem Netz $\tau = \{\mathcal{M}(T_{n,r}) : r \in \mathbb{R}^n_{>0}\}$ und dem Atlas $\mathcal{A}$, der $\mathcal{M}(T_{n,r})$ die Algebra $T_{n,r}$ zuordnet. Das folgt aus Lemma 5.15.

2) Ist A eine $K-$affinoide Algebra, so ist $\tau_0 = \{\mathcal{M}(A)\}$ ein Netz auf $\mathcal{M}(A)$ und $\mathcal{A}_0 = \{A\}$ ein $K-$affinoider Atlas. Also ist $\big(\mathcal{M}(A), \tau_0, \mathcal{A}_0\big)$ ein $K-$analytischer Raum.

3) Wir können auch durch

$$\tau : \{V \subset \mathcal{M}(A) : V \text{ affinoider Teilbereich}\}$$

ein Netz auf $\mathcal{M}(A)$ definieren.

Dann ist $\mathcal{A} = \{A_V : V \subset \mathcal{M}(A) \text{ affinoider Teilbereich }\}$ ein $K-$affinoider Atlas und $\big(\mathcal{M}(A), \tau, \mathcal{A}\big)$ ebenfalls ein $K-$analytischer Raum.

4) Es sei $\mathfrak{a} \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal. Wir definieren jetzt einen analytischen Raum $Z(\mathfrak{a})^{an} \subset (\mathbb{A}^n_K)^{an}$, so dass für alle $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ die Seminorm

$$\begin{array}{rcl} K[x_1, \ldots, x_n] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geqq 0} \\ f & \longmapsto & \mid f(a_1, \ldots, a_n) \mid_K \end{array}$$

genau dann in $Z(\mathfrak{a})^{an}$ liegt, wenn $g(a_1, \ldots, a_n) = 0$ ist für alle $g \in \mathfrak{a}$.

Dazu sei $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$. Das Ideal $\mathfrak{a} \subset K[x_1, \ldots, x_n] \subset T_{n,r}$ erzeugt ein Ideal $\mathfrak{a}T_{n,r}$ in der Algebra $T_{n,r} = \{\sum\limits_I a_I x^I :\mid a_I \mid r^I \underset{|I| \to \infty}{\longrightarrow} 0\}$.

Die Algebra $A_r = T_{n,r}/\mathfrak{a}T_{n,r}$ ist affinoid, wenn wir sie mit der Quotientennorm versehen.

Es sei $T(\mathfrak{a})$ die Menge aller multiplikativen Seminormen $\gamma : K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a} \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$, die den Betrag auf K fortsetzen.

Versehen mit der gröbsten Topologie, die alle Auswertungsabbildungen in $f \in K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}$ stetig macht, wird $T(\mathfrak{a})$ ein topologischer Raum.

Wir haben eine natürliche Einbettung

$$\begin{array}{rcl} i : T(\mathfrak{a}) & \subset & (\mathbb{A}^n_K)^{an} \\ \gamma & \mapsto & \gamma \circ q, \end{array}$$

wobei $q : K[x_1, \ldots, x_n] \to K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}$ die Quotientenabbildung ist.

Diese Einbettung ist ein Homöomorphismus von $T(\mathfrak{a})$ auf die abgeschlossene Teilmenge $\{\gamma \in (\mathbb{A}^n_K)^{an} : \gamma(g) = 0 \text{ für alle } g \in \mathfrak{a}\}$ von $(\mathbb{A}^n_K)^{an}$ (versehen mit der Relativtopologie).

Für jedes $r \in \mathbb{R}^n_{>0}$ ist $V_r := i^{-1}\big(\mathcal{M}(T_{n,r})\big)$ also eine kompakte Teilmenge von $T(\mathfrak{a})$.

Wir definieren $\tau = \{V_r : r \in \mathbb{R}^n_{>0}\}$. Das ist ein Netz auf $T(\mathfrak{a})$.

Wir ordnen jedem V_r die affinoide Algebra $A_r = T_{n,r}/\mathfrak{a}T_{n,r}$ zu. Wir wollen nun zeigen, dass diese Zuordnung einen $K-$affinoiden Atlas auf $T(\mathfrak{a})$ bezüglich τ definiert.

Die Quotientenabbildung $T_{n,r} \to A_{n,r}$ vermittelt nämlich eine stetige Abbildung

$$i_r : \mathcal{M}(A_{n,r}) \to \mathcal{M}(T_{n,r}) \subset (\mathbb{A}^n_K)^{an}.$$

Diese ist ein Homöomorphismus von $\mathcal{M}(A_{n,r})$ auf Bild $(i_r) = \{\gamma \in \mathcal{M}(T_{n,r}) : \gamma(g) = 0$ für alle $g \in \mathfrak{a}T_{n,r}\}$.

Ferner ist $K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a} \subset T_{n,r}/\mathfrak{a}T_{n,r} = A_r$. Die Einschränkung von Seminormen vermittelt also eine stetige Abbildung

$$\mathcal{M}(A_r) \longrightarrow T(\mathfrak{a}).$$

Offenbar ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(A_{n,r}) & \xrightarrow{i_r} & \mathcal{M}(T_{n,r}) \\ \downarrow & & \bigcap \\ T(\mathfrak{a}) & \xrightarrow{i} & (\mathbb{A}^n_K)^{an} \end{array}$$

kommutativ. Da i, i_r und die rechte vertikale Abbildung jeweils Homöormophismen auf ihre Bilder vermitteln, gilt das auch für die linke vertikale Abbildung. Ihr Bild ist $V_r = i^{-1}\big(\mathcal{M}(T_{n,r})\big)$, also ist $V_r \simeq \mathcal{M}(A_{n,r})$ homöomorph.

Ist $V_r \subset V_s$, so folgt $r_i \leqq s_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Also ist $T_{n,s} \subset T_{n,r}$ und der induzierte Homomorphismus

$$A_{n,s} \to A_{n,r}$$

macht V_r zu einem affinoiden Teilbereich von V_s.

Daher ist $\mathcal{A}$ in der Tat ein $K-$affinoider Atlas auf $\tau(\mathfrak{a})$ bezüglich τ.

Wir bezeichnen den zugehörigen analytischen Raum mit $Z(\mathfrak{a})^{an} = \big(T(\mathfrak{a}), \tau, \mathcal{A}\big)$.

Diese Konstruktion ist ein Spezialfall des sogenannten Gaga-Funktors: Jedem Schema X, das von endlichem Typ über K ist, kann man auf funktorielle Weise einen analytischen Raum X^{an} zuordnen.

Ist $X \left\{ \begin{array}{l} \text{separiert} \\ \text{eigentlich} \\ \text{zusammenhängend} \end{array} \right\}$, so ist $X^{an} \left\{ \begin{array}{l} \text{Hausdorff} \\ \text{kompakt} \\ \text{wegzusammenhängend} \end{array} \right\}$.

Für ein affines Schema $X = \operatorname{Spec} K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}$ ist X^{an} gerade der oben konstruierte Raum $Z(\mathfrak{a})^{an}$. Als topologischer Raum ist dieser einfach die Menge der multiplikativen Seminormen auf $K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}$, die den Betrag auf K fortsetzen.

Falls K algebraisch abgeschlossen ist, so ist $X(K)$ eine dichte Teilmenge von X. Dies verallgemeinert Übungsaufgabe 22 und Lemma 5.12.

Wir wollen noch den analytischen projektiven Raum $(\mathbb{P}^n_K)^{an}$ kennenlernen.

Definition 6.4 *Wir nennen zwei Seminormen $\gamma_1, \gamma_2 : K[x_0, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ äquivalent, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass für jedes homogene Polynom f vom Grad d*

$$\gamma_1(f) = C^d \gamma_2(f)$$

gilt.

Wir definieren den topologischen Raum $(\mathbb{P}^n_K)^{an}$ als Menge der Äquivalenzklassen aller multiplikativen Seminormen

$$\gamma : K[x_0, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}_{\geqq 0},$$

so dass γ den Betrag auf K fortsetzt und auf mindestens einer Unbestimmten x_i nicht verschwindet.

Also ist $(\mathbb{P}^n_K)^{an}$ ein Quotient der offenen Teilmenge $\{\gamma \in (\mathbb{A}^{n+1}_K)^{an} : \gamma(x_i) = 0$ für mindestens ein $i\}$ von $(\mathbb{A}^{n+1}_K)^{an}$. Wir statten diese Teilmenge mit der Relativtopologie und $(\mathbb{P}^n_K)^{an}$ mit der Quotiententopologie aus. Wir schreiben $[\gamma]$ für die Äquivalenzklasse einer Seminorm γ auf $K[x_0, \ldots, x_n]$. Wir fixieren ein $i \in \{0, \ldots, n\}$. Die Teilmenge

$$U_i = \big\{[\gamma] \in (\mathbb{P}^n_K)^{an} : \gamma(x_i) = \max_{j=0,\ldots,n} \{\gamma(x_j)\}\big\}$$

ist wohldefiniert und eine abgeschlossene Teilmenge von $(\mathbb{P}^n_K)^{an}$.

Wir schreiben $K[y_0, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n]$ für den Polynomring in den n Variablen y_j für $j \neq i$ und $0 \leqq j \leqq n$. Die überdachte Variable wird also weggelassen.

Jetzt betten wir den topologischen Raum $A_i = \{\gamma : K[y_0, \ldots, \hat{y_1}, \ldots, y_n] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ multiplikative Seminorm, die $| \ |_K$ fortsetzt und $\gamma(y_j) \leqq 1$ für alle j erfüllt $\}$ in $(\mathbb{P}^n_K)^{an}$ ein. Offenbar ist $A_i \simeq \mathcal{M}(T_n) \subset (\mathbb{A}^n_K)^{an}$. Es sei $\alpha_i : K[x_0, \ldots, x_n] \to K[y_0, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n]$ der $K-$Algebrenhomomorphismus $f(x_0, \ldots, x_n) \mapsto f(y_0, \ldots, 1, \ldots, y_n)$, wobei 1 für x_i eingesetzt wird und y_j für x_j $(j \neq i)$ eingesetzt wird. Die Abbildung $\varphi_i : A_i \hookrightarrow (\mathbb{P}^n_K)^{an}$ ist folgendermaßen definiert. Für $\gamma \in A_i$ sei $\varphi_i(\gamma)$ die Äquivalenzklasse der Seminorm

$$K[x_0 \ldots x_n] \xrightarrow{\alpha_i} K[y_0, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}_{\geqq 0}.$$

Offenbar ist φ_i stetig.

Für jeden Vertreter γ' von $\varphi_i(\gamma)$ gilt

$$\gamma'(x_j) \leqq \gamma'(x_i) \text{ für alle } j = 0, \ldots, n.$$

Also landet φ_i in der abgeschlossenen Teilmenge $U_i = \big\{[\gamma] \in (\mathbb{P}_K^n)^{an} : \gamma(x_i) = \max\limits_{j=1,\ldots,n}\{\gamma(x_j)\}\big\}$ von $(\mathbb{P}_K^n)^{an}$.

Für ein Polynom $f(y_0, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n) \in K[y_0, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n]$ vom Grad d setzen wir

$$g(x_0, \ldots, x_n) = f\Big(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\Big) \cdot x_i^d.$$

Ist also $a_J y_0^{j_0} \ldots \widehat{y_i^{j_i}} \ldots y_n^{j_n}$ ein Monom in f, so ist $\mid J \mid \leqq d$, also $a_J x_0^{j_0} \cdot \ldots \cdot x_i^{d-|J|} \ldots x_n^{j_n}$ das entsprechende Monom in g. Definitionsgemäß ist g homogen vom Grad d. Dann sei $\psi_i : U_i \to A_i$ die Abbildung, die die Klasse $[\gamma] \in U_i$ auf

$$f \mapsto \gamma(g)/\gamma(x_i^d)$$

abbildet.

Das ist unabhängig von der Wahl des Vertreters γ der Äquivalenzklasse $[\gamma]$. Diese Abbildung definiert eine multiplikative Seminorm δ auf $K[y_0, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n]$, die den Betrag auf K fortsetzt und $\delta(y_j) = \gamma(x_j) \leqq 1$ erfüllt für alle $j \neq i$. Man prüft leicht nach, dass ψ stetig ist und dass

$$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{U_i} \text{ und } \varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{A_i}$$

gilt.

Also ist $\mathcal{M}(T_n)$ homöomorph zu der abgeschlossenen Teilmenge U_i.

Betrachten wir $U_i \cap U_j$ für $i \neq j$, so wird diese Teilmenge unter dem Homöomorphismus

$$U_i \xrightarrow{\psi_i} A_i$$

auf die Menge aller γ in A_i mit $\gamma(y_j) = 1$ abgebildet. Dies wird unter dem Homöomorphismus $A_i \to \mathcal{M}(T_n)$ auf dem Laurentbereich $\mathcal{M}(T_n)(y_j, y_j^{-1}) = \{\gamma \in \mathcal{M}(T_n) : \gamma(y_j) \leqq 1 \text{ und } \gamma(y_j) \geqq 1\}$ in $\mathcal{M}(T_n)$ abgebildet, ist also ein affinoider Teilbereich.

Daher ist $\tau = \{U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_r} : i_j \in \{0, \ldots, n\}, r \geqq 1\}$ ein Netz auf $(\mathbb{P}_K^n)^{an}$, das einen natürlichen affinoiden Atlas trägt.

Wir fixieren ein $i \in \{0, \ldots, n\}$ und betrachten wie oben den Algebrenhomomorphismus $\alpha_i : K[x_0, \ldots, x_n] \to K[y_0, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n]$, der x_i auf 1 abbildet. Dieser liefert eine stetige Abbildung

$$\varphi_i : (\mathbb{A}^n_K)^{an} \longrightarrow (\mathbb{P}^n_K)^{an},$$

die eine multiplikative Seminorm γ auf $K[x_1, \ldots, x_n] \simeq K[y_0, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n]$ auf die Äquivalenzklasse von $\gamma \circ \alpha_i$ abbildet.

Sind $\gamma_1 \circ \alpha_i$ und $\gamma_2 \circ \alpha_i$ äquivalent, so gibt es eine Konstante $C > 0$ mit

$$\gamma_1 \circ \alpha_i(g) = C^d \gamma_1 \circ \alpha_i(g)$$

für alle homogenen g vom Grad d.

Nun ist $\alpha_i(g) = \alpha_i(x_i^m g)$ für alle $m \geqq 0$. Aus

$$\gamma_1 \circ \alpha_i(g) = \gamma_1 \circ \alpha_i(x_i^m g) = C^{d+m} \gamma_1 \circ \alpha_i(g) = C^{d+m} \gamma_1 \circ \alpha_i(g)$$

folgt $C = 1$.

Da wir für jedes Polynom $f \in K[y_0, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n]$ ein homogenes $g \in K[x_0, \ldots, x_n]$ mit $\alpha_i(g) = f$ wählen können, ist φ_i injektiv. Das Bild von φ_i ist die offene Teilmenge

$$V_i = \{[\gamma] \in (\mathbb{P}^n_K)^{an} : \gamma(x_i) \neq 0\}$$

von $(\mathbb{P}^n_K)^{an}$.

Für jedes $[\gamma]$ mit $\gamma(x_i) \neq 0$ können wir nämlich eine Seminorm

$$\delta : K[y_0, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n] \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$$

definieren durch

$$\delta(f) = \frac{\gamma(g)}{\gamma(x_i^d)},$$

wobei g ein homogenes Polynom in $K[x_0, \ldots, x_n]$ mit $\alpha_i(g) = f$ ist. Das ist unabhängig von der Vertreterwahl und erfüllt $\delta \circ \alpha_i$ äquivalent zu γ. Also hat der topologische Raum $(\mathbb{P}^n_K)^{an}$ eine Überdeckung aus $(n + 1)$ affinen analytischen Räumen $(\mathbb{A}^n_K)^{an}$, wie man das von der algebraischen Geometrie her kennt.

Wir wollen nun auch für den projektiven Raum ein Skelett definieren.

Definition 6.5 *Der tropische projektive Raum ist definiert als*

$$\mathbf{TP}^n = (\mathbb{R}^{n+1}_{\geqq 0} \backslash \{0, \ldots, 0\}) / \sim,$$

wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation

$$(a_0, \ldots, a_n) \sim (\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}_{>0}$$

ist. Wir statten diesen Raum mit der Quotiententopologie aus.

Übungsaufgabe 37 *Studieren Sie die Konvergenz von Folgen in $\mathbf{TP}^n$.*

Dann haben wir für jedes $i = 0, \ldots, n$ eine natürliche Einbettung

$$\Theta_i : \mathbb{R}^n_{\geqq 0} \hookrightarrow \mathbf{TP}^n,$$

die durch $\Theta_i(a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_n) = (a_0, \ldots, 1, \ldots, a_n)$ gegeben wird, wobei 1 an der $i-$ten Stelle steht. Θ_i ist ein Homöomorphismus auf die affine Teilmenge $\mathcal{W}_i = \{[(a_0, \ldots, a_n)] \in \mathbf{TP}^n : a_i \neq 0\}$ von $\mathbf{TP}^n$.

Wir haben eine Tropikalisierungsabbildung

$$\begin{array}{rcl} t : (\mathbb{P}^n_K)^{an} & \longrightarrow & \mathbf{TP}^n \\ \gamma & \longmapsto & [\big(\gamma(x_0), \ldots, \gamma(x_n)\big)], \end{array}$$

wobei $[\,]$ die Äquivalenzklasse bezüglich $\sim$ bezeichnet. Diese ist surjektiv und stetig. Offenbar kommutiert für alle i das Diagramm

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{A}^n_K)^{an} \arrow[r, "t"] \arrow[d, hook, "\varphi_i"'] & \mathbb{R}^n_{\geqq 0} \arrow[d, hook, "\Theta_i"] \\ (\mathbb{P}^n_K)^{an} \arrow[r, "t"] & \mathbf{TP}^n, \end{tikzcd}$$

wobei die obere vertikale Abbildung die Tropikalisierungsabbildung aus Kapitel 5 ist. Die Abbildung t hat einen kanonischen Schnitt $s : \mathbf{TP}^n \to (\mathbb{P}^n_K)^{an}$, der die Klasse $[u = (u_1, \ldots, u_n)]$ auf die Klasse der Seminorm

$$\begin{array}{rcl} s(u) : K[x_0, \ldots, x_n] & \to & \mathbb{R}_{\geqq 0} \\ \sum a_I x^I & \mapsto & \max\limits_I \mid a_I \mid u^I \end{array}$$

abbildet. Offenbar ist mit dem Schnitt $s_i : \mathbb{R}^n_{\geqq 0} \to (\mathbb{A}^n_K)^{an}$ aus Kapital 5 das Diagramm

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{A}^n_K)^{an} \arrow[d, hook, "\varphi_i"'] & \mathbb{R}^n_{\geqq 0} \arrow[l, "s_i"'] \arrow[d, hook, "\Theta_i"] \\ (\mathbb{P}^n_K)^{an} & \mathbf{TP}^n \arrow[l, "s"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ. Es ist Bild$(s) = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i\big(\text{Bild}(s_i)\big)$.

Genau wie in Kapitel 5 zeigt man, dass Bild $(s) \subset (\mathbb{P}_K^n)^{an}$ abgeschlossen ist und dass s einen Homöomorphismus von $\mathbf{TP}^n$ auf sein Bild vermittelt.

Im Beweis von Satz 5.17 haben wir eine stetige Abbildung

$$\Phi : (\mathbb{A}_K^n)^{an} \times [0,1] \to (\mathbb{A}_K^n)^{an}$$

definiert, die Bild (s_i) zu einem starken Deformationsretrakt von $(\mathbb{A}_K^n)^{an}$ macht.

Mit Hilfe des Homöomorphismus φ_i definieren wir eine stetige Abbildung

$$\Phi_i : V_i \times [0,1] \to V_i,$$

so dass $\Phi_i(x,0) = x$ für alle $x \in V_i$, $\Phi_i(x,1) \in \varphi_i\big(\text{Bild}(s_i)\big) \subset \text{Bild}(s)$ und $\Phi_i(a,t) = a$ für alle $a \in \varphi_i\big(\text{Bild}(s_i)\big)$ ist.

Eine direkte Rechnung zeigt, dass Φ_i und Φ_j auf $U_i \cap U_j \times [0,1]$ zusammenpassen. Also können wir sie zu einer stetigen Abbildung

$$\Phi : (\mathbb{P}_K^n)^{an} \times [0,1] \to (\mathbb{P}_K^n)^{an}$$

zusammensetzen, die folgende Eigenschaften hat:

i) $\Phi(x,0) = x$ für alle $x \in (\mathbb{P}_K^n)^{an}$

ii) $\Phi(x,1) \in \text{Bild}(s)$ für alle $x \in (\mathbb{P}_K^n)^{an}$

iii) $\Phi(a,t) = a$ für alle $a \in \text{Bild}(s)$.

Also ist Bild$(s) \simeq \mathbf{TP}^n$ ein starkes Deformationsretrakt von $(\mathbb{P}_K^n)^{an}$.

Da $\mathbf{TP}^n$ zusammenziehbar ist, ist daher auch $(\mathbb{P}_K^n)^{an}$ zusammenziehbar.

Jetzt wollen wir Morphismen analytischer Räume definieren.

Definition 6.6 *Es seien $(X,\tau,\mathcal{A})$ und $(X',\tau',\mathcal{A}')$ $K-$analytische Räume. Ein starker Morphismus*

$$\varphi : (X,\tau,\mathcal{A}) \to (X,\tau',\mathcal{A}')$$

ist eine stetige Abbildung $\varphi : X \to X'$, so dass für alle $V \in \tau$ ein $V' \in \tau'$ mit $\varphi(V) \subset V'$ existiert, zusammen mit einem kompatiblen System von $K-$Algebrenhomomorphismen $A_{V'} \to A_V$ für alle $V \in \tau$ und $V' \in \tau'$ mit $\varphi(V) \subset V'$, das in offensichtlicher Weise transitiv ist.

Beispiel: Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ vermittelt die injektive stetige Abbildung

$$\varphi : T(\mathfrak{a}) \hookrightarrow (\mathbb{A}^n_K)^{an}$$

einen starken Morphismus $Z(\mathfrak{a})^{an} \to (\mathbb{A}^n_K)^{an}$.

Definition 6.7 *Ein starker Morphismus $\varphi : (X, \tau, \mathcal{A}) \to (X', \tau' \mathcal{A}')$ heißt Quasi-Isomorphimus, falls $\varphi : X \to X'$ ein Homöomorphismus ist und falls für alle $V \in \tau$ und $V' \in \tau'$ mit $\varphi(V) \subset V'$ die Abbildung*

$$\varphi/_V : V \to V'$$

V mit einem affinoiden Teilbereich von V' identifiziert.

Beispiel: Ist $X = \mathcal{M}(A)$ $K-$affinoid, so können wir X mit $\tau_1 = \{X\}$ und $\mathcal{A}_1 = \{A_X\}$ so wie mit

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \{V \subset X : V \text{ affinoider Teilbereich von } X\} \\ &\text{und} \\ \mathcal{A}_2 &= \{A_V : V \in \tau\} \end{aligned}$$

ausstatten. Die Identität id: $X \to X$ vermittelt dann einen Quasi-Isomorphismus $(X, \tau_2, \mathcal{A}_2) \to (X, \tau_1, \mathcal{A}_1)$.

An diesem Beispiel sieht man, dass man solche Quasi-Isomorphismen am liebsten als Isomorphismen behandeln würde.

Das erreicht man formal durch Lokalisieren.

Proposition 6.8 *Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und S eine Klasse von Morphismen in $\mathcal{C}$. Dann gibt es eine Kategorie $\mathcal{C}[S^{-1}]$, die Lokalisierung von $\mathcal{C}$ nach S, zusammen mit einem Funktor*

$$Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}],$$

so dass gilt:

i) Für jeden Morphismus $s \in S$ ist $Q(s)$ ein Isomorphismus in $\mathcal{C}[S^{-1}]$.

ii) Ist $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor in eine Kategorie $\mathcal{D}$, so dass für jedes $s \in S$ der Morphismus $F(s)$ ein Isomorphismus ist, dann gibt es genau einen Funktor $G : \mathcal{C}[S^{-1}] \to \mathcal{D}$ mit $G \circ Q = F$.

Wir werden dieses Resultat aus der Kategorientheorie hier nicht beweisen.

Beispiel: Wir betrachten die Kategorie $\mathcal{C}$ der abelschen Gruppen und die Klasse S, die aus allen Morphismen der Form

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \to & \mathcal{G} \\ g & \mapsto & ng = \underbrace{(g + \ldots + g)}_{n-\text{mal}} \end{array}$$

für eine abelsche Gruppe $\mathcal{G}$ und eine natürliche Zahl n besteht. Dann ist die Lokalisierung $\mathcal{C}[S^{-1}]$ gerade die Kategorie der $\mathbb{Q}-$Vektorräume.

Im allgemeinen sind Lokalisierungen von Kategorien nicht einfach zu beschreiben. Im Falle der starken Morphismen von Berkovichräumen hat man jedoch das folgende Resultat.

Proposition 6.9 *Das System der Quasi-Isomorphismen zwischen $K-$analytischen Räumen erfüllt folgende Bedingungen:*

i) Jede Identitätsabbildung ist ein Quasi-Isomorphimus.

ii) Die Verknüpfung von zwei Quasi-Isomorphimen ist ein Quasi-Isomorphismus:

iii) Jedes Diagramm der Form

$$(X, \mathcal{A}, \tau) \xrightarrow{\varphi} (X', \mathcal{A}', \tau') \xleftarrow{g} (\tilde{X}', \tilde{\mathcal{A}}', \tilde{\tau}')$$

von starken Morphismen $K-$analytischer Räume, so dass g ein Quasi-Isomorphismus ist, lässt sich fortsetzen zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} (X, \mathcal{A}, \tau) \arrow[r, "\varphi"] & (X', \mathcal{A}', \tau') \\ (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\tau}) \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\psi"] & (\tilde{X}', \tilde{\mathcal{A}}', \tilde{\tau}'), \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

so dass f ein Quasi-Isomorphismus ist.

iv) Falls $\varphi, \psi : (X, \mathcal{A}, \tau) \to (X', \mathcal{A}', \tau')$ zwei starke Morphismen sind, so dass es einen Quasi-Isomorphismus $g : (X', \mathcal{A}', \tau') \to (\tilde{X}', \tilde{\mathcal{A}}', \tilde{\tau}')$ gibt mit $g\varphi = g\psi$, dann folgt $\varphi = \psi$.

Beweis : Siehe [Ber2], Proposition 1.2.10.

Wir lassen i) und ii) als Übungsaufgabe.

iii) Gegeben seien starke Morphismen

$$(X, \mathcal{A}, \tau) \xrightarrow{\varphi} (X', \mathcal{A}', \tau') \xleftarrow{g} (\tilde{X}', \tilde{\mathcal{A}}', \tilde{\tau}')$$

mit einem Quasi-Isomorphismus g. Da die Abbildung $g : \tilde{X}' \to X'$ ein Homöomorphismus ist, können wir $\tilde{X}' = X'$ annehmen.

Es sei $\tilde{X} = X$. Wir definieren ein neues Netz $\overline{\tau}$ auf X, das aus allen $W \subset X$ besteht, die affinoider Teilbereich eines $V \in \tau$ sind. Die Algebren dieser affinoiden Teilbereiche liefern einen $K-$affinoiden Atlas $\overline{\mathcal{A}}$ bezüglich $\overline{\tau}$.

Nun sei $\tilde{\tau}$ die Familie aller $V \in \overline{\tau}$, für die es ein $\tilde{V}' \in \tilde{\tau}'$ mit $\varphi(V) \subset \tilde{V}'$ gibt. Das definiert ein Netz auf X (Übungsaufgabe). Der $K-$affinoide Atlas $\overline{\mathcal{A}}$ liefert einen $K-$affinoiden Atlas $\tilde{\mathcal{A}}$ bezüglich $\tilde{\tau}$, und φ induziert einen starken Morphismus

$$\psi : (X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\tau}) \to (X', \tilde{\mathcal{A}}', \tilde{\tau}').$$

Der kanonische Quasi-Isomorphismus

$$f : (X, \tilde{\mathcal{A}}, \tau) \to (X, \mathcal{A}, \tau)$$

komplettiert das gewünschte Diagramm.

iv) Ist $g\varphi = g\psi$ in der Situation von iv), so ist $\varphi = \psi$ als stetige Abbildung von X nach X'.

Es sei $V \in \tau$ und $V' \in \tau'$ mit $\varphi(V) \subset V'$. Dann existiert ein $\tilde{V}' \in \tilde{\tau}'$ mit $g(V') \subset \tilde{V}'$. Da g ein Quasi-Isomorphismus ist, identifiziert g die Menge V' mit einem affinoiden Teilbereich von $\tilde{V}$. Die Abbildungen φ und ψ liefern zwei Homomorphismen

$$A_{V'} \to A_V,$$

deren Kompositionen mit dem Homomorphismus $A_{\tilde{V}'} \to A_{V'}$ übereinstimmen. Da $g(V')$ ein affinoider Teilbereich ist, folgt aus der Eindeutigkeitsbedingung der universellen Eigenschaft, dass die Algebrenhomomorphismen zu φ und ψ übereinstimmen. Daher ist $\varphi = \psi$. □

Wenn eine Klasse von Morphismen in einer Kategorie die Eigenschaften i) - iv) aus Proposition 6.8 hat, sagt man, sie erlaubt einen „Calculus of right fractions“. In diesem Fall lässt sich die Lokalisierungskategorie einfacher beschreiben.

Definition 6.10 *Die Kategorie der $K-$analytischen Räume ist die Lokalisierung der Kategorie der analytischen Räume mit starken Morphismen nach der Klasse aller Quasi-Isomorphismen.*

Die Objekte der Kategorie der $K-$analytischen Räume sind dann gerade die $K-$analytischen Räume. Ein Morphismus $\varphi : (X, \mathcal{A}, \tau) \to (X', \mathcal{A}', \tau')$ von $K-$analytischen Räumen ist eine Äquivalenzklssse von Diagrammen

$$\begin{tikzcd} & (X'', \mathcal{A}'', \tau'') \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ (X, \mathcal{A}, \tau) & & (X', \mathcal{A}', \tau'), \end{tikzcd}$$

wobei s ein Quasi-Isomorphismus und f ein starker Morphismus ist.

Jeder Morphismus φ lässt sich also darstellen als $\varphi = f \circ s^{-1}$ für einen Quasi-Isomorphismus s und einen starken Morphismus f.

Dabei heißen zwei Diagramme mit Morphismen (s_1, f_1) und (s_2, f_2) wie oben äquivalent, falls sie von einem dritten Diagramm desselben Typs gemeinsam dominiert werden.

Details hierzu findet man in [Ga-Zi].

7 Reduktion und Shilovrand

Wir wollen nun noch einige Begriffe diskutieren, die für das Studium polyedrischer Substrukturen analytischer Räume (Stichwort „Skelette“) wichtig sind. Es sei A eine K-affine Algebra mit der Banachnorm $\| \cdot \|$. Dann trägt A die „spektrale Seminorm“

$$\rho(f) = \inf_{n \geqq 1} \sqrt[n]{\|f^n\|},$$

In 5.10 haben wir gesehen, dass $\rho(f) = \max_{\gamma \in \mathcal{M}(A)} \gamma(f)$ gilt.

Definition 7.1 *Es sei*

$$A^\circ = \{a \in A \colon \rho(a) \leqq 1\} \quad \textit{und}$$
$$A^{\circ\circ} = \{a \in A \colon \rho(a) < 1\}.$$

Dann ist A° ein Unterring von A und $A^{\circ\circ}$ ein Ideal von A°. Mit $\widetilde{A} = A^\circ / A^{\circ\circ}$ bezeichnen wir den Quotientenring. Für $A = K$ ist $K^\circ = R_K$, $K^{\circ\circ} = \mathcal{M}_K$ und $\widetilde{K} = \mathcal{O}_K/\mathcal{M}_K$ der Restklassenkörper.

Übungsaufgabe 38 *$\widetilde{A}$ ist ein reduzierter Ring, enthält also keine nilpotenten Elemente $\neq 0$.*

Es sei $f \colon A \to B$ ein beschränkter Homomorphismus von Banachalgebren. Es gibt also eine Konstante $C > 0$ und $\|f(a)\|_B \leqq C\|a\|_A$ für alle $a \in A$. Also ist $\rho(f(a)) \leqq \rho(a)$ für alle $a \in A$. Daher vermittelt $f \colon A \to B$ einen Ringhomomorphismus

$$f^\circ : A^\circ \to B^\circ$$

mit $f^\circ(A^{\circ\circ}) \subset B^{\circ\circ}$. So erhalten wir einen Homomorphismus

$$\widetilde{f} \colon \widetilde{A} \to \widetilde{B}$$

der Restklassenringe. Wir betrachten für $\gamma \in A$ den Körper $\mathcal{H}(\gamma)$, der durch Komplettieren des Quotientenkörpers von $A/\ker\gamma$ entsteht (siehe Kapitel 5). Dann ist $A \to A/\ker\gamma \hookrightarrow \mathcal{H}(\gamma)$ ein beschränkter Homomorphismus von Banachalgebren. Also erhalten wir einen Ringhomomorphismus

$$\widetilde{A} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}(\gamma)}$$

der Reduktionen. $\widetilde{\mathcal{H}(\gamma)}$ ist hier der Restklassenkörper von $\mathcal{H}(\gamma)$. Der Kern dieses Restklassenhomomorphismus ist ein Primideal in $\widetilde{A}$. Wir bezeichnen es mit $\pi(\gamma)$. Ferner bezeichnen wir die Menge aller Primideale in $\widetilde{A}$ mit Spec $\widetilde{A}$.

Beispiel 1 *Für $A = T_n = \left\{\sum\limits_I a_I x^I \colon |a_I| \to 0\right\}$ ist*

$$T_n^\circ = \left\{\sum_I a_I x^I \in T_n \colon |a_I| \leqq 1 \textit{ für alle } I\right\}, T_n^{\circ\circ} = \left\{\sum_I a_I x^I \,\middle|\, |\, a_I < 1 \textit{ für alle } I\right\}$$

sowie $\widetilde{T_n} = T_n^\circ / T_n^{\circ\circ} \simeq \widetilde{K}[x_1, \ldots, x_n]$, wobei $\widetilde{K}$ den Restklassenkörper von K bezeichnet.

Die Abbildung
$$\mathcal{M}(T_n) \longrightarrow \text{Spec } \widetilde{K}[x_1, \ldots, x_n]$$
schickt die Banachnorm auf T_n auf (0).

Lemma 7.2 *Sei A eine K-affinoide Algebra.*

i) Es sei $\mathfrak{a} = (\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_r) \subset \tilde{A}$ ein Ideal und $f_i \in A^\circ$ ein Vertreter der Restklasse $\tilde{f}_i$ für alle $i = 1, \ldots, r$. Dann ist

$$\pi^{-1}(\{\mathfrak{p} \in Spec\tilde{A} : \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\}) = \{\gamma \in \mathcal{M}(A) : \gamma(f_i) < 1 \textit{ für } i = 1, \ldots, r\}$$

ii) Ist $f \in A^\circ \backslash A^{\circ\circ}$ mit Restklasse $\tilde{f} \neq 0$ in $\tilde{A}$, so ist

$$\pi^{-1}\big(D(\tilde{f})\big) = \{\gamma \in \mathcal{M}(A) : \gamma(f) = 1\} \neq \emptyset.$$

Hier schreiben wir
$$D(\tilde{f}) = \{\mathfrak{p} \in \ Spec\ \tilde{A} : \tilde{f} \notin \mathfrak{p}\}.$$

Beweis :

i) Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $\tilde{A}$ mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ so liegen alle $\tilde{f}_i \in \mathfrak{p}$. Ist $\gamma \in \mathcal{M}(A)$ eine Seminorm mit $\pi(\gamma) = \mathfrak{p}$, so ist $\mathfrak{p}$ der Kern des Homomorphismus
$$\tilde{A} \to \widetilde{\mathcal{H}(\gamma)}.$$
Da $f_i \in A^\circ$ ist, folgt $\gamma(f_i) < 1$.

Ist umgekehrt $\gamma \in \mathcal{M}(A)$ eine Seminorm mit $\gamma(f_i) < 1$ für alle $i = 1, \ldots, r$, so liegen alle $\tilde{f}_i \in \tilde{A}$ im Kern von $\tilde{A} \to \widetilde{\mathcal{H}(\gamma)}$. Also folgt $\pi(\gamma) \supset (f_1 \ldots f_r)$.

ii) Ist $\gamma \in \mathcal{M}(A)$ mit $\tilde{f} \notin \pi(\gamma)$, so liegt $\tilde{f}$ nicht im Kern von $\tilde{A} \to \widetilde{\mathcal{H}(\gamma)}$. Daher wird f unter $A^\circ \to \mathcal{H}(\gamma)^\circ$ auf ein Element der Norm 1 abgebildet, also gilt $\gamma(f) = 1$. Ist umgekehrt $\gamma(f) = 1$, so folgt mit demselben Argument, dass $\tilde{f}$ nicht im Kern von $\tilde{A} \to \widetilde{\mathcal{H}(\gamma)}$ liegt. Also ist $\tilde{f} \notin \pi(\gamma)$.

Nach Voraussetzung ist $f \in A^\circ \backslash A^{\circ\circ}$. Also ist $\rho(f) = 1$. Da $\rho(f) = \max_{\gamma \in \mathcal{M}(A)} \gamma(f)$ ist, ist $\{\gamma \in \mathcal{M}(A) : \gamma(f) = 1\} \neq \emptyset$.

$\square$

Man kann die Aussage des Lemmas auch so ausdrücken: Das Urbild einer Zariski-abgeschlossenen Teilmenge in Spec $\tilde{A}$ unter π ist offen in $\mathcal{M}(A)$, das Urbild einer Zariski offenen Menge unter π ist abgeschlossen in $\mathcal{M}(A)$.

Korollar 7.3 *Ist $\mathfrak{p}$ ein (bezüglich Inklusion) minimales Primideal in $\tilde{A}$, so ist $\pi^{-1}(\{\mathfrak{p}\}) \subset \mathcal{M}(A)$ abgeschlossen und nicht leer.*

Beweis : Es ist $\{\mathfrak{p}\} = \bigcap\limits_{g \notin \mathfrak{p}} D(g)$, denn ist $\mathfrak{q}$ ein Primideal in $\tilde{A}$ mit $g \notin \mathfrak{q}$ für alle g mit $g \notin \mathfrak{p}$, so folgt $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, also wegen der Minimalität $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$.

Daher ist $\pi^{-1}(\{\mathfrak{p}\}) = \bigcap\limits_{\substack{f \in A^\circ \setminus A^{\circ\circ}, \\ \tilde{f} \notin \mathfrak{p}}} \pi^{-1}\big(D(\tilde{f})\big)$. Nach Lemma 7.2 ist die rechte Seite abgeschlossen. Falls sie leer ist, so bilden die Mengen $\mathcal{M}(A) \setminus \pi^{-1}\big(D(\tilde{f})\big)$ eine offene Überdeckung von $\mathcal{M}(A)$. Da $\mathcal{M}(A)$ kompakt ist, existiert dann eine endliche Teilüberdeckung. Also gibt es endlich viele $f_1, \dots, f_r \in A^\circ \setminus A^{\circ\circ}$ mit $\bigcap\limits_{i=1}^{r} \pi^{-1}\big(D(\tilde{f}_i)\big) = \emptyset$.

Das widerspricht wegen

$$D(\tilde{f}_1) \cap \ldots \cap D(\tilde{f}_r) = D(\tilde{f}_i \cdot \ldots \cdot \tilde{f}_r)$$

der Aussage ii) in Lemma 7.2. □

Übungsaufgabe 39 *(siehe [BGR], 7.2.6) Es sei A eine strikt $K-$affinoide Algebra und $f \in A^\circ$. Mit $\tilde{f}$ bezeichnen wir das induzierte Element in $\tilde{A}$. Es sei $\tilde{A}[\tilde{f}^{-1}]$ die Lokalisierung von $\tilde{A}$ nach allen Potenzen von f, also die Menge aller Brüche der Form $a/f^n (a \in \tilde{A}, n \geqq 0)$ mit den durch die Bruchrechnung definierten Rechenregeln.*

Wir betrachten den affinoiden Teilbereich

$$\{\gamma \in \mathcal{M}(A) : \gamma'(f) \geqq 1\} \subset \mathcal{M}(A)$$

mit affinoider Algebra $A\{f^{-1}\}$. Dann ist $\widetilde{A\{f^{-1}\}} \simeq \tilde{A}[\tilde{f}^{-1}]$, und die kanonische Abbildung $A \hookrightarrow A\{f^{-1}\}$ induziert die kanonische Abbildung $\tilde{A} \to \tilde{A}[\tilde{f}^{-1}]$ in der Reduktion.

Satz 7.4 *Es sei A eine strikt $K-$affinoide Algebra. Ist $\tilde{A}$ nullteilerfrei, so ist $\rho \in \mathcal{M}(A)$ und es gilt*

$$\pi^{-1}(\{0\}) = \{\rho\}.$$

Beweis : Nach Korollar 7.3 ist $\pi^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$. Wir wählen also ein Element $\gamma_0 \in \mathcal{M}(A)$ mit $\pi(\gamma_0) = (0)$ und wollen zeigen, dass

$$\gamma_0(f) = \rho(f) \text{ für alle } f \in A.$$

Nach Proposition 5.10 gilt $\rho(f) = \max\limits_{\gamma \in \mathcal{M}(A)} \gamma(f)$. Offenbar stimmt unsere Behauptung, wenn $\rho(f) = 0$ ist. Ist $\rho(f) \neq 0$, so gibt es mit Hilfe von Übungsaufgabe 34, 3) ein $a \in K^*$ und ein $n \geqq 1$ mit $\rho(f)^n = \mid a \mid$. Wir setzen $g = a^{-1} f^n \in A^\circ \backslash A^{\circ\circ}$.

Dann ist $\tilde{g} \neq 0$, also folgt aus $\pi(\gamma_0) = (0)$, dass $\gamma_0(g) = 1$ ist. Daher ist $\gamma_0(f)^n = \gamma_0(f^n) = \mid a \mid = \rho(f)^n$, woraus die Behauptung folgt. □

Satz 7.5 *Es sei A eine strikt $K-$affinoide Algebra.*

i) Für jedes minimale Primideal $\mathfrak{p} \subset \tilde{A}$ gibt es genau ein $\gamma \in \mathcal{M}(A)$ mit $\pi(\gamma) = \mathfrak{p}$.

ii) Es seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ die minimalen Primideale in $\tilde{A}$ und $\gamma_1, \ldots, \gamma_r \in \mathcal{M}(A)$ die zugehörigen Elemente mit $\pi(\gamma_i) = \mathfrak{p}_i$.

Dann ist für jedes $f \in A$

$$\rho(f) = \max_{i=1,\ldots,r} \gamma_i(f).$$

iii) Es sei U eine offene Umgebung von γ_i. Dann existiert ein $f \in A$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $\mid \gamma_i(f) \mid = \rho(f)$ und

$$\{\gamma \in \mathcal{M}(A) : \gamma(f) > \rho(f) - \varepsilon\} \subset U.$$

Beweis : Wir benutzen folgende Tatsachen aus der kommutativen Algebra: Ein noetherscher Ring R hat nur endlich viele (inklusions-) minimale Primideale. Der Schnitt aller Primideale in R ist das Nilradikal $\sqrt{0} = \{r \in R : \text{ es gibt ein } n \geqq 1 \text{ mit } r^n = 0\}$.

Ist R reduziert, so ist also der Schnitt aller minimalen Primideale gleich Null. Sind $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ paarweise verschiedene Primideale in R, so ist

$$\mathfrak{p}_1 \not\subset \bigcup_{i=2}^{r} \mathfrak{p}_i.$$

i) Ist $\mathfrak{p} \subset \tilde{A}$ ein minimales Primideal, so existiert ein $\tilde{f} \in \tilde{A}$ mit $\tilde{f} \notin \mathfrak{p}$, das in allen anderen minimalen Primidealen enthalten ist.

Der reduzierte Ring $\tilde{A}[\tilde{f}^{-1}]$ enthält dann nur ein minimales Primideal, also ist er nullteilerfrei. Sei $f \in A^\circ$ ein Vertreter der Restklasse $\tilde{f} \in \tilde{A}$.

In Übungsaufgabe 40 haben wir gesehen, dass $\tilde{A}[\tilde{f}^{-1}]$ die Reduktion der strikt $K-$affinoiden Algebra $A\{f^{-1}\}$ ist. Ist $\gamma \in \mathcal{M}(A)$ eine Seminorm mit $\pi(\gamma) = \mathfrak{p}$, so folgt $\gamma(f) = 1$ aus $\tilde{f} \notin \mathfrak{p}$. Also liegt γ im affinoiden Teilbereich

$$\{\gamma \in \mathcal{M}(A) : \gamma(f) = 1\} \simeq \mathcal{M}(A\{f^{-1}\})$$

von $\mathcal{M}(A)$. Daher folgt die Behauptung aus Satz 7.4.

ii) Wir können $\rho(f) \neq 0$ annehmen. Die Ungleichung $\rho(f) \geqq \max_i \gamma_i(f)$ folgt aus Proposition 5.10.

Wie im Beweis von Satz 7.4 finden wir ein $g \in A^\circ \backslash A^{\circ\circ}$ mit $g = a^{-1} f^n$ für ein $a \in K$ und ein $n \geqq 0$.

Dann ist $0 \neq \tilde{g} \in \tilde{A}$, und da $\tilde{A}$ reduziert ist, gibt es ein minimales Primideal $\mathfrak{p}_i$ mit $\tilde{g} \notin \mathfrak{p}_i$. Dann ist $\gamma_i(g) = 1$, woraus $\rho(f) = \gamma_i(f)$ folgt.

iii) Nach Korollar 7.3 ist

$$\pi^{-1}(\{\mathfrak{p}_i\}) = \bigcap_{\substack{f \in A^\circ \backslash A^{\circ\circ} \\ \tilde{f} \notin \mathfrak{p}_i}} \pi^{-1}\big(D(\tilde{f})\big),$$

und in Lemma 7.2 ii) haben wir gesehen, dass $\pi^{-1}\big(D(\tilde{f})\big) = \{\gamma \in \mathcal{M}(A) : \gamma(f) = 1\}$ ist.

Die offene Überdeckung von $\mathcal{M}(A)$ aus U und allen $\mathcal{M}(A) \backslash \pi^{-1}\big(D(\tilde{f})\big)$ für $f \in A^\circ \backslash A^{\circ\circ}$ mit $\tilde{f} \notin \mathfrak{p}_i$ hat eine endliche Teilüberdeckung. Also ist

$$\mathcal{M}(A) = U \cup \big(\mathcal{M}(A) \backslash \pi^{-1} D(\tilde{f}_1 \cdot \ldots \cdot \tilde{f}_m)\big)$$

für geeignete $f_1, \ldots, f_m$.

Also folgt $\pi^{-1} D(\tilde{f}_1 \cdot \ldots \cdot \tilde{f}_m) \subset U$. Somit gibt es ein $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_m \in A^\circ \backslash A^{\circ\circ}$ mit $\tilde{f} \notin \mathfrak{p}_i$, so dass

$$\Sigma := \{\gamma \in \mathcal{M}(A) : \gamma(f) = 1\} \subset U$$

ist.

Es gilt $\Sigma = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \Sigma_\varepsilon$ für

$$\Sigma_\varepsilon = \{\gamma \in \mathcal{M}(A) : \gamma(f) \geqq 1 - \varepsilon\}.$$

Mit einem Kompaktheits-Argument zeigt man, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $\Sigma_\varepsilon \subset U$. Daraus folgt die Behauptung.

□

Da $\mathcal{M}(A)$ kompakt ist, nimmt für jedes $f \in A$ die Auswertungsabbildung

$$ev_f : \gamma \mapsto \gamma(f)$$

auf $\mathcal{M}(A)$ ihr Maximum an.

Definition 7.6 *i) Eine abgeschlossene Teilmenge $\Gamma \subset \mathcal{M}(A)$ heißt Rand, falls für jedes $f \in A$ die Auswertungsfunktion ev_f ihr Maximum auf Γ annimmt. Nach dem Zorn'schen Lemma gibt es (inklusions-)minimale Ränder.*

ii) Eine Teilmenge $\Gamma \subset \mathcal{M}(A)$ heißt Shilovrand, falls sie der einzige minimale Rand in $\mathcal{M}(A)$ ist.

Korollar 7.7 *Sei A eine strikt $K-$affinoide Algebra. In $\mathcal{M}(A)$ existiert ein Shilovrand Γ. Dieser ist die endliche Teilmenge*

$$\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_r : \pi(\gamma_i) \text{ minimales Primideal in } \tilde{A}\}.$$

Beweis : Das folgt aus Satz 7.5. □

Ist A eine beliebige $K-$affinoide Algebra, so gibt es eine nicht-archimedische Körpererweiterung L/K mit $A\hat{\otimes}_K L$ strikt $K-$affinoid (siehe Übungsaufgabe 32).

Korollar 7.8 *Ist A eine beliebige $K-$affinoide Algebra, so existiert ein Shilovrand $\Gamma \subset \mathcal{M}(A)$. Dieser ist eine endliche Menge.*

Beweis : Es genügt zu zeigen, dass die Behauptung für $A\hat{\otimes}_K K_r$ gilt, falls sie für A gilt. Der Erweiterungskörper L mit $A\hat{\otimes}_K L$ strikt affinoid kann nämlich als $L = K_{r_1}\hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} K_{r_n}$ mit $(r_1, \ldots, r_n)$ linear unabhängig in $\mathbb{R}_{>0}/\sqrt{|K^*|}$ gewählt werden.

Es ist $A\hat{\otimes}_K K_r = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n : a_n \in A \text{ und } \parallel a_n \parallel r^n \underset{|n|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}$, denn man prüft leicht nach, dass die rechte Seite die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes erfüllt.

Die kanonische Abbildung $A \to A\hat{\otimes}_K K_r$ liefert eine stetige Abbildung

$$\pi : \mathcal{M}(A\hat{\otimes}_K K_r) \to \mathcal{M}(A)$$

auf den Berkovichspektren. Für $\gamma \in A\hat{\otimes}_K K_r$ ist $\pi(\gamma)$ einfach die Einschränkung von γ auf A.

Die Menge $\pi(\Gamma)$ ist als stetiges Bild einer kompakten Teilmenge insbesondere abgeschlossen. Da für jedes Element $f \in A$ die Auswertungsabbildung ev_f ihr Maximum auf $\pi(\Gamma)$ annimmt, ist $\pi(\Gamma) \subset \mathcal{M}(A)$ ein Rand. Sei nun $\gamma \in \Gamma$ und $U \subset \mathcal{M}(A)$ eine offene Umgebung von $\pi(\gamma)$. Dann existiert nach Satz 7.5 iii) ein $f \in A$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $\mid \gamma(f) \mid = \rho(f)$ und

$$\{\gamma' \in \mathcal{M}(A\hat{\otimes}_K K_r) : \gamma'(f) > \rho(f) - \varepsilon\} \subset \pi^{-1}(U).$$

Für $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n$ ist $\rho(f) = \max\{\rho_A(a_n) r^n\}$ (Übungsaufgabe). Wegen $\pi(\gamma)(a_n) \leqq \rho_A(a_n)$ und $\gamma(f) = \max_n \mid \pi(\gamma)(a_n) \mid r^n$ folgt daraus $\rho_A(a_n) = \pi(\gamma)(a_n)$ und $\rho(f) = \pi(\gamma)(a_n) r^n$ für ein geeignetes n. Daher ist

$$\{\gamma' \in \mathcal{M}(A) : \gamma'(a_n) > \rho_A(a_n) - \varepsilon r^{-n}\} \subset U,$$

woraus die Behauptung folgt. $\square$

Literatur

[AM] M. F. Atiyah , I.G. MacDonald. *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley 1969.

[Ba-Ru] M. Baker, R. Rumely. *Potential theory and dynamics on the Berkovich projective line*, American Mathematical Society 2010.

[Ber1] V. G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-archimedean fields*, American Mathematical Society 1990.

[Ber2] V. G. Berkovich. *Etale cohomology for non-Archimedean analytic spaces*, Publ. Math. IHES 78 (1993), 5-161.

[BGR] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert. *Non-archimedean analysis*, Springer 1984.

[Bo] S. Bosch. *Lectures on formal and rigid geometry*, Springer 2014.

[Con] B. Conrad. *Several approaches to non-archimedean analytic geometry*, In: $P-$adic geometry. Lectures from the 2007 Arizona Winter school. American Mathematical Society 2008.

[Duc] A. Ducros. *Espaces analytiques p-adiques au sens de Berkovich.* Séminaire Bourbaki Exposé 958 (2006).

[Ga-Zi] P. Gabriel, M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory.* Springer 1967.

[Gou] F. Gouvea. *$p-$adic numbers.* Second edition. Springer 1997.

[Rob] A. Robert. *A course in $p-$adic analysis.* Graduate Text in Math. 198. Springer 2000.

[Sil] J. Silverman. *The arithmetic of dynamical systems.* Springer 2007.

[Tem] M. Temkin. *Introduction to Berkovich analytic spaces.* arXiv 1101.3199.

[Wer] A. Werner. *Nicht-archimedische Zahlen.* Vorlesungsskript WS 2012/13.