Skript zur Vorlesung

Algebraische Geometrie 1

Sommersemester 2013
Frankfurt am Main

Prof. Dr. Annette Werner

Inhaltsverzeichnis

1 Das Spektrum eines Ringes

Wir wollen nun für jeden Ring A einen topologischen Raum $\operatorname{Spec} A$ definieren, den wir später zu einem „affinen Schema“ machen werden. Es sei daran erinnert, dass alle unsere Ringe kommutativ mit 1 sind.

Definition 1.1 Sei A ein Ring.

i) Das **Spektrum** von A ist definiert als

$$\operatorname{Spec} A = \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \subset A \text{ Primideal } \}.$$

ii) Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ sei

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \subset A \text{ Primideal mit } \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\} \subset \operatorname{Spec} A.$$

Beispiele:

i) Ist K ein Körper, so ist $\operatorname{Spec} K = \{0\}$ eine Einpunktmenge.

ii) Für $A = \mathbb{Z}$ gilt

$$\operatorname{Spec} \mathbb{Z} = \{0\} \cup \{(p) : p \text{ Primzahl } \}.$$

Für das Ideal $(n) = n\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$V((n)) = \{(p) : p \text{ Primzahl}, p|n\}, \quad \text{falls } n \neq 0 \text{ ist},$$

sowie $V((0)) = \mathbb{Z}$.

Die Menge $V(\mathfrak{a})$ verhalten sich ähnlich wie die Nullstellenmengen aus §3.

Lemma 1.2 Für Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, (\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ in A, I eine beliebige Indexmenge, gilt

i) $V((0)) = \operatorname{Spec} A, \quad V(A) = \emptyset.$

ii) Ist $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, so folgt $V(\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a})$.

iii) $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

iv) $V(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i) = \bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i)$.

Beweis :

i) Jedes Primideal enthält 0, kein Primideal enthält 1.

ii) Ist $\mathfrak{p}$ in $V(\mathfrak{b})$, so ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$. Also gilt auch $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$.

iii) Ist $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$, so ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$. Somit ist auch $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$.
Ist umgekehrt $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$, so müssen wir $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ zeigen. Es existiert also ein $f \in \mathfrak{a}$ mit $f \notin \mathfrak{p}$. Sei $g \in \mathfrak{b}$ ein beliebiges Element. Dann ist $fg \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, folgt $f \in \mathfrak{p}$ (was ausgeschlossen ist) oder $g \in \mathfrak{p}$. Also ist $g \in \mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$.

iv) Da für alle $i \in I$ die Inklusion $\mathfrak{a}_i \subset \sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i$ gilt, ist nach i) $V(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i) \subset \bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i)$.
Ist umgekehrt $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$ für alle $i \in I$, so folgt $\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{p} \in V(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i)$.

□

Definition 1.3 Wir nennen eine Teilmenge $U \subset \operatorname{Spec} A$ **offen**, wenn es ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ gibt mit $U = \operatorname{Spec} A \setminus V(\mathfrak{a})$.

Die Menge $\operatorname{Spec} A$ zusammen mit den so definierten offenen Teilmengen ist ein topologischer Raum, denn nach Lemma 4.2 gilt

i) $\emptyset$ und $\operatorname{Spec} A$ sind offen.

ii) Endliche Schnitte offener Mengen sind offen.

iii) Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.

Die so definierte Topologie auf $\operatorname{Spec} A$ heißt Zariski-Topologie.

Beispiel: Die offenen Teilmengen von $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ sind $\emptyset$, $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ und alle Mengen der Form $\operatorname{Spec} \mathbb{Z} \setminus \{(p_1), ..., (p_r)\}$ für endlich viele Primzahlen $p_1, ..., p_r$. Wir haben nämlich oben gesehen, dass die Mengen $V(\mathfrak{a})$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ gerade die folgenden sind: $V((0)) = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, $V((1)) = \emptyset$ und $V((n)) = \{(p) : p|n\}$ für $n \geqq 2$.

Jede nicht-leere offene Menge in $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ enthält also den Punkt (0). Insbesondere ist die Zariski-Topologie auf $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ nicht Hausdorff'sch.

Definition 1.4 Für jedes $f \in A$ sei

$$D(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : f \notin \mathfrak{p}\} \subset \operatorname{Spec} A.$$

Die Teilmenge $D(f) \subset \operatorname{Spec} A$ ist offen, denn es gilt

$$D(f) = \operatorname{Spec} A \setminus V((f)),$$

wobei (f) das von f erzeugte Hauptideal in A ist.

Die offenen Mengen $D(f)$ für $f \in A$ bilden eine Basis der Zariski-Topologie auf $\operatorname{Spec} A$, d.h. für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ und jede offene Teilmenge $U \subset \operatorname{Spec} A$ mit $\mathfrak{p} \in U$ gibt es ein $f \in A$ mit $D(f) \subset U$. Jedes offene U mit $\mathfrak{p} \in U$ (d.h. jede offene Umgebung U von $\mathfrak{p}$) ist nämlich von der Form

$$U = \operatorname{Spec} A \setminus V(\mathfrak{a})$$

für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$. Da $\mathfrak{p} \in U$ ist, folgt natürlich $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$, d.h. $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$. Somit existiert ein $f \in \mathfrak{a}$ mit $f \notin \mathfrak{p}$. Also gilt $\mathfrak{p} \in D(f)$. Wegen $f \in \mathfrak{a}$ folgt außerdem $V(\mathfrak{a}) \subset V((f))$, also $D(f) \subset U$.

Es sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Dann definieren wir eine Abbildung

$$f = \operatorname{Spec}\varphi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$$

durch $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Da für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset B$ das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \subset A$ ein Primideal ist (Übungsaufgabe), ist f wohldefiniert.

Lemma 1.5 Es sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ die zugehörige Abbildung. Dann gilt:

i) f ist stetig.

ii) Ist $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal in A und $\varphi(\mathfrak{a})B$ das von $\varphi(\mathfrak{a})$ erzeugte Ideal in B, so gilt

$$f^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\varphi(\mathfrak{a})B).$$

iii) Ist $g \in A$, so gilt $f^{-1}(D(g)) = D(\varphi(g))$.

iv) Ist φ surjektiv, so induziert f einen **Homöomorphismus** (also eine bijektive, stetige Abbildung mit stetiger Umkehrabbildung)

$$f : \operatorname{Spec} B \to V(\operatorname{Kern}\varphi).$$

Beweis :

i) Folgt sofort aus ii), denn es genügt zu zeigen, dass Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.

ii) Sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Dann gilt für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von B:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \in f^{-1}(V(\mathfrak{a})) &\Leftrightarrow \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \in V(\mathfrak{a}) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{a} \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \\ &\Leftrightarrow \varphi(\mathfrak{a})B \subset \mathfrak{p} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{p} \in V(\varphi(\mathfrak{a})B). \end{aligned}$$

iii) $f^{-1}(D(g))$ besteht aus allen Primidealen in B, so dass $g \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ gilt. Das ist äquivalent zu $\varphi(g) \notin \mathfrak{p}$, also zu $\mathfrak{p} \in D(\varphi(g))$.

iv) Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset B$ gilt $\operatorname{Kern}\varphi \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, also ist $\operatorname{Bild}(f) \subset V(\operatorname{Kern}\varphi)$.

Sei $\mathfrak{q} \in V(\operatorname{Kern}\varphi)$ ein beliebiges Primideal. Da φ surjektiv ist, ist $\varphi(\mathfrak{q})$ ein Ideal in B (Übungsaufgabe). Dies ist sogar ein Primideal. Gilt nämlich $\varphi(f)\varphi(g) \in \varphi(\mathfrak{q})$ für $f, g \in A$, so existiert ein $h \in \operatorname{Kern}\varphi$ mit $fg - h \in \mathfrak{q}$. Da $\operatorname{Kern}\varphi \subset \mathfrak{q}$ ist, folgt $fg \in \mathfrak{q}$, also $f \in \mathfrak{q}$ oder $g \in \mathfrak{q}$. Somit ist $\varphi(f) \in \varphi(\mathfrak{q})$ oder $\varphi(g) \in \varphi(\mathfrak{q})$.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{f} : V(\operatorname{Kern}\varphi) &\to \operatorname{Spec} B \\ \mathfrak{q} &\mapsto \varphi(\mathfrak{q}) \end{aligned}$$

ist eine Umkehrabbildung zu f, wie man leicht nachrechnet. Ferner gilt

$$\tilde{f}^{-1}(V(\mathfrak{b})) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})),$$

also ist $\tilde{f}$ ebenfalls stetig. Damit ist f ein Homöomorphismus $\operatorname{Spec} B \to V(\text{Kern}\varphi)$.

$\square$

Beispiel: In $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ gilt $V((9)) = V((3)) = \operatorname{Spec} \mathbb{Z} \setminus \{3\}$.

Wir wollen jetzt analysieren, unter welchen Umständen verschiedene Ideale in A dieselbe abgeschlossene Teilmenge in $\operatorname{Spec} A$ induzieren. Dazu brauchen wir folgendes Lemma.

Lemma 1.6 Es sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Dann ist $\sqrt{\mathfrak{a}}$ gleich dem Schnitt aller Primideale in A, die $\mathfrak{a}$ enthalten.

Beweis : Ist $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, so liegt $f^k \in \mathfrak{a}$ für ein $k \geqq 1$. Ist $\mathfrak{p} \subset A$ ein beliebiges Primideal mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, so folgt aus $f^k \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ also $f \in \mathfrak{p}$. Daher gilt $\sqrt{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{p}$.

Sei umgekehrt $f \in A$ ein Element, das <u>nicht</u> in $\sqrt{\mathfrak{a}}$ enthalten ist. Also gilt für alle $k \geqq 1$, dass f^k nicht in $\mathfrak{a}$ liegt. Wir betrachten nun die Menge

$$\Sigma = \{\mathfrak{b} : \mathfrak{b} \subset A \text{ Ideal mit } \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}, \text{ so dass für alle } k \geqq 1 \text{ das Element } f^k \text{ nicht in } \mathfrak{b} \text{ liegt}\}.$$

Diese Menge enthält $\mathfrak{a}$, ist also insbesondere nicht leer.

Wir betrachten eine bezüglich der Inklusion total geordnete Teilmenge $\{\mathfrak{b}_i : i \in I\}$ von Σ. Dann ist $\bigcup\limits_{i \in I} \mathfrak{b}_i$ ein Ideal in A, das $\mathfrak{a}$ enthält, aber kein f^k. Also ist $\bigcup\limits_{i \in I} \mathfrak{b}_i \in \Sigma$ eine obere Schranke. Nach dem Lemma von Zorn hat Σ somit ein maximales Element $\mathfrak{p}$.

Wir zeigen, dass $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist. Angenommen, $x \notin \mathfrak{p}$ und $y \notin \mathfrak{p}$ für Elemente $x, y \in A$. Dann sind $\mathfrak{p}+(x)$ und $\mathfrak{p}+(y)$ Ideale in A, die echt größer als $\mathfrak{p}$ sind. Da $\mathfrak{p}$ in Σ maximal ist, können weder $\mathfrak{p}+(x)$ noch $\mathfrak{p}+(y)$ in Σ liegen. Da beide Ideale $\mathfrak{a}$ enthalten, existieren $k, l \geqq 1$ mit $f^k \in \mathfrak{p} + (x)$ und $f^l \in \mathfrak{p} + (y)$. Daher ist $f^{k+l} \in (\mathfrak{p} + (x))(\mathfrak{p} + (y)) \subset \mathfrak{p} + (xy)$. Also ist $\mathfrak{p} + (xy) \notin \Sigma$, woraus $xy \notin \mathfrak{p}$ folgt. Daher ist $\mathfrak{p}$ in der Tat ein Primideal in $V(\mathfrak{a})$ mit $f \notin \mathfrak{p}$. Da f dann nicht im Schnitt aller Primideale sein kann, die $\mathfrak{a}$ enthalten, folgt die andere Inklusion. $\square$

Satz 1.7 Es gilt $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b})$ genau dann, wenn $\mathfrak{b} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$ ist. Insbesondere ist $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b})$ genau dann, wenn $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$ ist.

Beweis : Ist $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b})$, so folgt $\mathfrak{b} \subset \sqrt{\mathfrak{b}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})} \mathfrak{p} \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Umgekehrt folgt aus $\mathfrak{b} \subset \sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$, dass jedes Primideal, das $\mathfrak{a}$ enthält, auch $\mathfrak{b}$ enthält. Also gilt $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b})$. □

Nun untersuchen wir die Topologie auf $\operatorname{Spec} A$. Dazu brauchen wir folgenden Begriff.

Definition 1.8 Es sei T ein topologischer Raum. Eine nichtleere Teilmenge $Z \subset T$ heißt **irreduzibel**, wenn Z nur auf triviale Weise als Vereinigung von in Z abgeschlossenen Mengen geschrieben werden kann, d.h. aus

$$Z = Z_1 \cup Z_2$$

mit $Z_1, Z_2 \subset Z$ abgeschlossen folgt

$$Z_1 = Z \text{ oder } Z_2 = Z.$$

Hier heißt $Z_1 \subset Z$ abgeschlossen, falls Z_1 abgeschlossen in der Relativtopologie von Z ist, d.h. falls $Z = Z_1 \cap Y$ für eine abgeschlossene Teilmenge $Y \subset T$ gilt.

Beispiel: Es sei $Z \subset \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ eine beliebige Teilmenge. Da die abgeschlossenen Teilmengen in $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ gerade die Mengen der Form $\emptyset$, $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, $\{(p_1), ..., (p_r)\}$ sind, sind folgende Mengen irreduzibel:

$$\operatorname{Spec} \mathbb{Z}, \quad \emptyset, \quad \operatorname{Spec} \mathbb{Z} \setminus \{(0)\}, \quad \{(3)\}, \quad \{(0), (3)\}.$$

Die Menge $V((10)) = \{(2), (5)\}$ ist etwa nicht irreduzibel.

Lemma 1.9 i) Ist T ein topologischer Raum und $Z \subset T$ eine irreduzible Teilmenge, so ist auch jede Teilmenge $U \subset Z$, die offen in Z ist, irreduzibel.

ii) Ist $Z \subset T$ irreduzibel, so ist auch der Abschluss von Z, also die Menge

$$\overline{Z} = \bigcap_{\substack{Y \subset T \text{abgeschlossen} \\ Z \subset Y}} Y,$$

irreduzibel.

Beweis :

i) Gilt $U = U_1 \cup U_2$ mit Mengen der Form $U_1 = U \cap Y_1$ und $U_2 = U \cap Y_2$, wobei Y_1 und Y_2 abgeschlossen sind, so gilt

$$Z = (Z \cap Y_1) \cup (Z \cap (Y_2 \cup Z \setminus U)),$$

was man sich am besten an Hand eines Bildes klar macht. Da Z irreduzibel ist, folgt $Z = Z \cap Y_1$ oder $Z = Z \cap (Y_2 \cup Z \setminus U)$. Daher gilt $U = U \cap Y_1$ oder $U = U \cap Y_2$ und U ist irreduzibel.

ii) Gilt $\overline{Z} = Y_1 \cup Y_2$ für $Y_1, Y_2 \subset \overline{Z}$, die in $\overline{Z}$, also auch in T abgeschlossen sind, so ist

$$Z = (Y_1 \cap Z) \cup (Y_2 \cap Z).$$

Da Z irreduzibel ist, folgt $Z = Y_1 \cap Z$ oder $Z = Y_2 \cap Z$, d.h. $Z \subset Y_1$ oder $Z \subset Y_2$. Da Y_1 und Y_2 abgeschlossen sind, folgt daraus $\overline{Z} \subset Y_1$ oder $\overline{Z} \subset Y_2$ und somit $\overline{Z} = Y_1$ oder $\overline{Z} = Z_2$. Daher ist $\overline{Z}$ irreduzibel.

$\square$

Beispiel: Die Teilmenge $\operatorname{Spec} \mathbb{Z} \setminus \{(2), (3), (13)\}$ ist offen in $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, daher ist mit $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ auch $\operatorname{Spec} \mathbb{Z} \setminus \{(2), (3), (13)\}$ irreduzibel.

Proposition 1.10 Die abgeschlossene Teilmenge $V(\mathfrak{a}) \subset \operatorname{Spec} A$ ist genau dann irreduzibel, wenn $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ein Primideal ist. Die Zuordnung

$$\mathfrak{p} \mapsto V(\mathfrak{p})$$

ist also eine inklusionsumkehrende Bijektion

$$\operatorname{Spec} A \to \{\text{irreduzible abgeschlossene Teilmengen von } \operatorname{Spec} A\}.$$

Beweis : Angenommen, $V(\mathfrak{a})$ ist irreduzibel. Gilt $xy \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ für $x, y \in A$, so ist $(xy) \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$, also folgt $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}}) \subset V((xy))$.

Sei $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. Dann ist $\mathfrak{p} \in V((xy))$, also gilt $xy \in \mathfrak{p}$, woraus $x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p}$ folgt. Daher ist $\mathfrak{p} \in V((x))$ oder $\mathfrak{p} \in V((y))$. Also gilt $V(\mathfrak{a}) = (V(\mathfrak{a}) \cap V((x))) \cup (V(\mathfrak{a}) \cap V((y)))$.

Da $V(\mathfrak{a})$ irreduzibel ist, folgt $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a}) \cap V((x))$ oder $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a}) \cap V((y))$, d.h. es gilt $V(\mathfrak{a}) \subset V((x))$ oder $V(\mathfrak{a}) \subset V((y))$. Nach Satz 4.7 folgt daraus $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ oder $y \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, also ist $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ein Primideal.

Ist umgekehrt $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ein Primideal, so sei $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}_1) \cup V(\mathfrak{b}_2)$ eine Darstellung von $V(\mathfrak{a})$ als Vereinigung zweier abgeschlossener Teilmengen. Nach Lemma 4.2 ist also $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)$, woraus mit Satz 4.7 $\sqrt{\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$ folgt.

Angenommen $V(\mathfrak{b}_1) \subsetneqq V(\mathfrak{a})$. Dann ist nach Satz 4.7 $\sqrt{\mathfrak{a}} \subsetneqq \sqrt{\mathfrak{b}_1}$, d.h. es existiert ein $x \in \sqrt{\mathfrak{b}_1}$ mit $x \notin \sqrt{\mathfrak{a}}$. Für alle $y \in \mathfrak{b}_2$ ist dann $xy \in \sqrt{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2} \subset \sqrt{\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$. Da $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ein Primideal ist und $x \notin \sqrt{\mathfrak{a}}$, folgt $y \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. Somit gilt $\mathfrak{b}_2 \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$, woraus $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b}_2)$ folgt. Also ist $V(\mathfrak{a})$ irreduzibel.

Der zweite Teil der Behauptung folgt mit Satz 4.7, wenn man beachtet, dass für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ die Gleichung $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{p}}$ gilt. □

Korollar 1.11 Spec A ist genau dann irreduzibel, wenn $\mathrm{Nil}(A) = \sqrt{0}$ ein Primideal ist.

Beweis : Da Spec $A = V((0))$ ist, folgt dies aus Proposition 4.10. □

Definition 1.12 Ein topologischer Raum T heißt **noethersch**, wenn er folgende absteigende Kettenbedingung für abgeschlossene Teilmengen erfüllt:
Für jede Kette $Y_1 \supset Y_2 \supset ... Y_n \supset Y_{n+1} \supset ...$ abgeschlossener Teilmengen $Y_n \subset T$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $Y_{n_0} = Y_n$ für alle $n \geqq n_0$.

Lemma 1.13 Ist A ein noetherscher Ring, so ist Spec A ein noetherscher topologischer Raum.

Beweis : Eine absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen in Spec A ist von der Form

$$V(\mathfrak{a}_1) \supset V(\mathfrak{a}_2) \supset ... \supset V(\mathfrak{a}_n) \supset ...$$

für Ideale $(\mathfrak{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von A. Mit Satz 4.7 gilt

$$\sqrt{\mathfrak{a}_1} \subset \sqrt{\mathfrak{a}_2} \subset ... \subset \sqrt{\mathfrak{a}_n} \subset ... .$$

Da A noethersch ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{\mathfrak{a}_{n_0}} = \sqrt{\mathfrak{a}_n}$ für $n \geqq n_0$. Daraus folgt die Behauptung, da $V(\sqrt{\mathfrak{a}_n}) = V(\mathfrak{a}_n)$ ist. $\square$

<u>Vorsicht:</u> Die Umkehrung von Lemma 1.13 gilt nicht!

Proposition 1.14 In einem noetherschen topologischen Raum T ist jede nicht-leere abgeschlossene Teilmenge Y die Vereinigung endlich vieler irreduzibler abgeschlossener Teilmengen Y_i, das heißt es gilt

$$Y = Y_1 \cup ... \cup Y_n.$$

Falls wir hier $Y_j \not\subset Y_i$ annehmen, so sind die Mengen $Y_1, ..., Y_n$ (bis auf die Numerierung) eindeutig bestimmt. Sie heißen die **irreduziblen Komponenten von** Y.

Beweis : Sei $\mathcal{S}$ die Menge der nicht-leeren abgeschlossenen Teilmengen von T, die sich nicht als endliche Vereinigung irreduzibler abgeschlossener Teilmengen darstellen lassen.

Angenommen, $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Dann enthält $\mathcal{S}$ ein minimales Element. Falls nicht, finden wir nämlich eine Kette abgeschlossener Teilmengen $(Y_n)_{n \geqq 1}$ in $\mathcal{S}$ mit

$$Y_1 \supsetneqq Y_2 \supsetneqq ... \supsetneqq Y_n \supsetneqq ... ,$$

was der Tatsache widerspricht, dass T ein noetherscher topologischer Raum ist.

Sei $Y \in \mathcal{S}$ ein minimales Element. Da Y nicht irreduzibel sein kann, gilt $Y = Y_1 \cup Y_2$ mit echten abgeschlossenen Teilmengen $Y_i \subsetneqq Y$. Da Y in $\mathcal{S}$ minimal ist, folgt $Y_1 \notin \mathcal{S}$ und $Y_2 \notin \mathcal{S}$. Beide sind also als endliche Vereinigung irreduzibler abgeschlossener Teilmengen darstellbar. Dann ist aber auch Y als Vereinigung irreduzibler abgeschlossener Teilmengen darstellbar, was $Y \in \mathcal{S}$ widerspricht. Somit ist $\mathcal{S} = \emptyset$.

Jede abgeschlossene Teilmenge Y von T ist also Vereinigung $Y = Y_1 \cup ... \cup Y_n$ von irreduziblen, abgeschlossenen Y_i. Indem wir gegebenenfalls einige Y_i weglassen, können wir $Y_i \not\subset Y_j$ für $i \neq j$ annehmen.

Angenommen, $Y = Y_1' \cup ... \cup Y_m'$ ist eine andere solche Darstellung. Dann ist $Y_1' \subset Y = Y_1 \cup ... \cup Y_n$, also $Y_1' = \bigcup_{i=1}^{n} (Y_1' \cap Y_i)$. Da Y_1' irreduzibel ist, folgt $Y_1' = Y_1' \cap Y_i$

für ein i. Nach Umnumerieren ist $i = 1$. Somit folgt $Y_1' \subset Y_1$. Auf dieselbe Weise zeigt man $Y_1 \subset Y_j'$ für ein j, woraus $Y_1' \subset Y_j'$, also $j = 1$ folgt. Somit ist $Y_1 = Y_1'$.

Auf diese Weise fährt man fort, bis alle Y_i verbraucht sind und erhält die Eindeutigkeit der Darstellung bis auf Umnumerierung. $\square$

Beispiel: Die irreduziblen Komponenten von Spec$\,(K[x,y]/xy)$ sind gerade die Teilmengen $V(x)$ und $V(y)$.

Allgemeiner gilt: Die irreduziblen Komponenten von Spec$\,A$ für einen noetherschen Ring A sind gerade die Teilmengen $V(\mathfrak{p}_i)$, wobei $\mathfrak{p}_i$ die endliche Menge der minimalen Primideale in A durchläuft (Übungsaufgabe).

Definition 1.15 i) Ein topologischer Raum T heißt **quasi-kompakt**, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Mit anderen Worten, sind $(U_i)_{i\in I}$ offene Teilmengen von T mit $T = \bigcup_{i\in I} U_i$, so gibt es endlich viele $i_1, ..., i_n \in I$ mit $T = U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_n}$.

ii) Ein topologischer Raum T heißt **kompakt**, wenn T Hausdorff'sch und quasi-kompakt ist.

In der Algebraischen Geometrie sind die betrachteten topologischen Räume meist nicht Hausdorff'sch, daher haben wir es hier mit der Eigenschaft quasi-kompakt zu tun.

Lemma 1.16 Für jeden Ring A ist Spec$\,A$ quasi-kompakt.

Beweis : Es sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von Spec$\,A$. Dann ist Spec$\,A \backslash U_i = V(\mathfrak{a}_i)$ für ein Ideal $\mathfrak{a}_i \subset A$. Da Spec$\,A = \bigcup U_i$ ist, folgt $\bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i) = \emptyset$. Nach Lemma 4.2 ist $V(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i) = \bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i) = \emptyset = V(A)$, woraus mit Satz 4.7 $\sqrt{\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i} = A$ folgt. Da $1 \in \sum_{i\in I} \sqrt{\mathfrak{a}_i}$ ist, gibt es Indizes $i_1, ..., i_n \in I$ und Elemente $f_{i_1} \in \mathfrak{a}_{i_1}, ..., f_{i_n} \in \mathfrak{a}_{i_n}$ mit $1 = f_{i_1} + ... + f_{i_n}$. Daher folgt $1 \in \mathfrak{a}_{i_1} + ... + \mathfrak{a}_{i_n}$, woraus $\emptyset = V((1)) = V(\sum_{j=1}^{n} \mathfrak{a}_{i_j}) = \bigcap_{j=1}^{n} V(\mathfrak{a}_{i_j})$ folgt. Also ist $U_{i_1}, ..., U_{i_n}$ eine endliche Teilüberdeckung von $(U_i)_{i\in I}$. $\square$

Proposition 1.17 Ein topologischer Raum T ist genau dann noethersch, wenn jede offene Teilmenge quasi-kompakt ist.

Beweis : Ist T noethersch und $U \subset T$ eine offene Teilmenge, so sei $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung von U. Enthält $(U_i)_{i \in I}$ keine endliche Teilüberdeckung, so existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein U_n mit

$$U_1 \subsetneqq U_1 \cup U_2 \subsetneqq U_1 \cup U_2 \cup U_3 \subsetneqq \ldots.$$

Die Komplemente der Mengen $U_1 \cup \ldots \cup U_m$ bilden dann eine absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen von T, die nicht stationär wird. Das widerspricht der Tatsache, dass T noethersch ist.

Umgekehrt nehmen wir an, jede offene Teilmenge $U \subset T$ sei quasi-kompakt. Sei $Y_1 \supset Y_2 \supset \ldots$ eine absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen von T. Dann ist $U = \bigcup_{n \geqq 1} (T \setminus Y_n)$ eine offene Teilmenge mit der offenen Überdeckung $(T \setminus Y_n)_{n \geqq 1}$. Da U quasi-kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $T \setminus Y_{n_1}, \ldots, T \setminus Y_{n_r}$ von U. Wir setzen $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_r\}$. Da $Y_{n_0} \subset Y_{n_j}$ ist, folgt $T \setminus Y_{n_j} \subset T \setminus Y_{n_0}$ für $j = 1, \ldots, r$. Also ist $U = T \setminus Y_{n_0}$. Für alle $n \geqq n_0$ gilt $U = T \setminus Y_{n_0} \subset T \setminus Y_n \subset U$, also folgt $Y_{n_0} = Y_n$. Somit wird die Kette der Y_n stationär, d.h. T ist noethersch. □

Wir wollen jetzt noch den Zusammenhang zur Theorie über algebraisch abgeschlossenen Körpern herstellen.

Lemma 1.18 Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathfrak{i} : \quad & \mathbb{A}^n(K) \to \operatorname{Spec} K[X_1, \ldots, X_n] \\ & (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n) \end{aligned}$$

stetig und injektiv. Das Bild von $\mathfrak{i}$ ist gerade die Menge $\operatorname{Max}(K[X_1, \ldots, X_n])$ der maximalen Ideale in $K[X_1, \ldots, X_n]$. Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ sei $\tilde{V}(\mathfrak{a}) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n(K) : f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ für alle } f \in \mathfrak{a}\}$ die Nullstellenmenge von $\mathfrak{a}$. Dann gilt

$$i^{-1}\big(V(\mathfrak{a})\big) = \tilde{V}(\mathfrak{a}).$$

Beweis : Nach dem Hilbert'schen Nullstellensatz sind die maximalen Ideale von $K[X_1, \ldots, X_n]$ gerade die Ideale der Form $X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n$ für $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n(K)$.

Offenbar ergeben verschiedene Punkte in $\mathbb{A}^n(K)$ auch verschiedene maximale Ideale. Also ist $\mathfrak{i}$ eine Bijektion $\mathbb{A}^n(K) \to \mathrm{Max}K[X_1, ..., X_n]$.

Ferner gilt

$$\mathfrak{i}^{-1}(V(\mathfrak{a})) = \{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{A}^n(K) : \mathfrak{a} \subset (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)\}.$$

Dies ist offenbar eine Teilmenge von $\tilde{V}(\mathfrak{a})$.

Ist umgekehrt $(a_1, ..., a_n) \in \tilde{V}(\mathfrak{a})$, so folgt

$$\{(a_1, ..., a_n)\} = \tilde{V}((X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)) \subset \tilde{V}(\mathfrak{a}),$$

also mit Hilfe von Korollar 3.16 aus der Vorlesung „Algebraische Geometrie: Grundlagen"

$$\mathfrak{a} \subset (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n), \quad \text{d.h. } (a_1, ..., a_n) \in \mathfrak{i}^{-1}(V(\mathfrak{a})).$$

$\square$

Ist man an Nullstellenmengen von Teilmengen des Polynomrings $K[X_1, ..., X_n]$ interessiert, so kommt man oft mit den maximalen Idealen aus. Möchte man beliebige Ringe studieren, so reicht das nicht mehr und man muss alle Primideale betrachten. Ein Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ etwa vermittelt im allgemeinen keine Abbildung zwischen Max(B) und Max(A), wohl aber eine Abbildung Spec $B \to$ Spec (A).

2 Projektive Spektren

Nun wollen wir topologische Räume zu graduierten Ringen betrachten.

Definition 2.1 i) Ein **graduierter Ring** B ist ein Ring der Form

$$B = \bigoplus_{d \geqq 0} B_d,$$

wobei alle B_d Untergruppen von B sind, die $B_d B_e \subset B_{d+e}$ erfüllen. Die Elemente in B_d heißen **homogene Elemente vom Grad** d.

ii) Sei A ein Ring. Eine **graduierte A-Algebra** ist ein graduierter Ring B, der gleichzeitig eine A-Algebra ist, so dass das Bild von A in B_0 enthalten ist.

Beispiel: Ist A ein Ring, so ist $B = A[X_1, \ldots, X_n]$ eine graduierte A-Algebra. Hier ist

$$B_d = \{ \sum_{I=(i_1,\ldots,i_n)} a_I X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n} : \text{ für alle } I \text{ mit } a_I \neq 0 \text{ gilt } i_1 + \ldots + i_n = d\}.$$

Die homogenen Elemente von Grad d sind also hier die homogenen Polynome vom Grad d.

Definition 2.2 Ein Ideal $\mathfrak{a}$ in einem graduierten Ring B heißt **homogen**, falls

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{d \geqq 0} (\mathfrak{a} \cap B_d).$$

Lemma 2.3 Ein Ideal $\mathfrak{a}$ in einem graduierten Ring B ist genau dann homogen, wenn es von homogenen Elementen erzeugt wird.

Beweis : Angenommen, $\mathfrak{a} = (f_i)_{i \in I}$ mit $f_i \in B_{d(i)}$ für gewisse $d(i) \geqq 0$. Dann ist jedes Element $g \in \mathfrak{a}$ eine Linearkombination der Form

$$g = g_1 f_{i_1} + \ldots + g_r f_{i_r}$$

für $g_j \in B$ und $i_1, \ldots, i_r \in I$. Indem wir alle g_j als Summe homogener Elemente schreiben und ausmultiplizieren, erhalten wir $g \in \bigoplus\limits_{d \geqq 0} (\mathfrak{a} \cap B_d)$. Also folgt $\mathfrak{a} \subset \bigoplus\limits_{d \geqq 0} (\mathfrak{a} \cap B_d)$ und damit Gleichheit, denn die andere Inklusion ist trivial.

Wir nehmen umgekehrt an, dass $\mathfrak{a} = \bigoplus\limits_{d \geqq 0} (\mathfrak{a} \cap B_d)$ gilt. Seien $(f_i)_{i \in I}$ beliebige Erzeuger von g. Alle f_i liegen in $\bigoplus\limits_{d \geqq 0} (\mathfrak{a} \cap B_d)$, lassen sich also als endliche Summe homogener Elemente in $\mathfrak{a}$ schreiben. Die homogenen Summanden aller f_i bilden ebenfalls ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{a}$. □

Lemma 2.4 Summe, Schnitt und Radikal von homogenen Idealen sind wieder homogene Ideale.

Beweis : Wir zeigen dies nur für die Summe, die anderen Behauptungen sind Übungsaufgaben.
Sind $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ homogene Ideale, so besitzen alle $\mathfrak{a}_i$ nach Lemma 2.3 ein Erzeugendensystem aus homogenen Elementen. Vereinigt man all diese Erzeugendensysteme, so erhält man ein Erzeugendensystem von $\sum\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i$. Also ist auch $\sum\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ homogen. □

Lemma 2.5 Ein homogenes Ideal $\mathfrak{p} \neq B$ in einem homogenen Ring B ist genau dann prim, wenn für homogene Elemente $f, g \in B$ gilt: Ist $fg \in \mathfrak{p}$, so folgt $f \in \mathfrak{p}$ oder $g \in \mathfrak{p}$.

Beweis : Übungsaufgabe. $\square$

Für jeden homogenen Ring $B = \bigoplus\limits_{d \geqq 0} B_d$ setzen wir $B_+ = \sum\limits_{d>0} B_d$. Die Teilmenge B_+ ist ein homogenes Ideal in B.

Definition 2.6 Für jeden homogenen Ring B sei

$$\operatorname{Proj} B = \{\mathfrak{p} \subset B : \mathfrak{p} \text{ homogenes Primideal mit } B_+ \not\subset \mathfrak{p}\}.$$

Wir wollen nun eine Topologie auf $\operatorname{Proj} B$ definieren. Für jedes homogene Ideal $\mathfrak{a} \subset B$ sei

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} B : \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}.$$

Lemma 2.7 Es seien $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ homogene Ideale in B.

i) $V(0) = \operatorname{Proj} B$, $V(B_+) = \emptyset$.

ii) $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

iii) $V(\sum\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i) = \bigcap\limits_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$.

Beweis : Analog zum Beweis von Lemma 1.2. $\square$

Wir nennen eine Teilmenge $U \subset \operatorname{Proj} B$ offen, falls es ein homogenes Ideal $\mathfrak{a} \subset B$ gibt mit $U = \operatorname{Proj} B \setminus V(\mathfrak{a})$. Nach Lemma 2.7 erhalten wir so eine Topologie auf $\operatorname{Proj} B$.

Für jedes homogene Element $f \in B_+$ sei

$$D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} B : f \notin \mathfrak{p}\} = \operatorname{Proj} B \setminus V((f)).$$

Die offenen Mengen $D_+(f)$ für homogene $f \in B_+$ bilden eine Basis der Topologie auf $\operatorname{Proj} B$, d.h. jede offene Umgebung U eines Punktes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} B$ enthält ein $D_+(f)$. Dies sieht man folgendermaßen ein. Es gilt $U = \operatorname{Proj} B \setminus V(\mathfrak{a})$ für ein homogenes Ideal $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$. Falls $\mathfrak{a} \cap B_+ \subset \mathfrak{p}$, so folgt $\mathfrak{a} \cap B_0 \not\subset \mathfrak{p}$, da $\mathfrak{a}$ homogen ist. Also existiert ein $f \in \mathfrak{a} \cap B_0$

mit $f \notin \mathfrak{p}$. Da $B_+ \not\subset \mathfrak{p}$ ist, gibt es zusätzlich ein $g \in B_+$ mit $g \notin \mathfrak{p}$. Also folgt $fg \notin \mathfrak{p}$, aber $fg \in \mathfrak{a} \cap B_+$. Das steht im Widerspruch zur Annahme $\mathfrak{a} \cap B_+ \subset \mathfrak{p}$. Diese ist also falsch. Für $f \in \mathfrak{a} \cap B_+$ mit $f \notin \mathfrak{p}$ folgt nun $\mathfrak{p} \in D_+(f) \subset U$.

Definition 2.8 i) Für $f \in B_+$ homogen vom Grad $d > 0$ sei

$$B_{(f)} = \{\frac{b}{f^k} : b \text{ homogen vom Grad } dk\}.$$

ii) Für ein homogenes Primideal $\mathfrak{p}$ in $\operatorname{Proj} B$ sei

$$B_{(\mathfrak{p})} = \{\frac{b}{c} : c \notin \mathfrak{p}, b, c \text{ homogen vom selben Grad }\}.$$

Es ist $B_{(f)} \subset B_f$ und $B_{(\mathfrak{p})} \subset B_{\mathfrak{p}}$ jeweils die Menge der homogenen Elemente vom Grad 0, wenn man den Grad eines Bruches als Zählergrad minus Nennergrad definiert.

Lemma 2.9 Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ homogene Ideale in B. Dann gilt $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b})$ genau dann, wenn $\mathfrak{b} \cap B_+ \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Beweis : Ist $\mathfrak{b} \cap B_+ \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$, so sei $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$, d.h. $\mathfrak{p}$ ist ein homogenes Primideal mit $B_+ \not\subset \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. Dann folgt $\mathfrak{b} \cap B_+ \subset \sqrt{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{p}$. Es sei $g \in B_+$ ein Element mit $g \notin \mathfrak{p}$. Dann gilt für alle $f \in \mathfrak{b}$, dass $fg \in \mathfrak{b} \cap B_+ \subset \mathfrak{p}$ ist. Also ist $f \in \mathfrak{p}$. Somit folgt $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})$. Umgekehrt nehmen wir $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b})$ an. Es sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal in B mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. Dann ist $\mathfrak{p}^h := \bigoplus_{d \geqq 0} \mathfrak{p} \cap B_d$ nach Definition 2.2 ein homogenes Primideal in B. Gilt $B_+ \not\subset \mathfrak{p}^h$, so folgt wegen $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^h \subset \mathfrak{p}^h$, dass $\mathfrak{p}^h \in V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b})$ gilt. Somit ist $\mathfrak{b} \cap B_+ \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}^h \subset \mathfrak{p}$. Gilt $B^+ \subset \mathfrak{p}^h$, so folgt $\mathfrak{b} \cap B_+ \subset \mathfrak{p}^h \subset \mathfrak{p}$. Also ist $\mathfrak{b} \cap B_+ \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \text{ Primideal}, \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}}$. □

Proposition 2.10 Es sei $f \in B_+$ ein homogenes Element. Dann ist $D_+(f)$ homöomorph zu $\operatorname{Spec} B_{(f)}$.

Beweis : Es sei $j : B \to B_f$ der kanonische Ringhomomorphismus $j(b) = b/1$. Der Ring $B_{(f)}$ ist ein Unterring von B_f. Für jedes homogene Ideal $\mathfrak{a}$ in B sei $\varphi(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} B_f \cap B_{(f)}$. Hier ist $\mathfrak{a} B_f = \{\frac{a}{f^k} : a \in \mathfrak{a}, k \geqq 0\}$ das von $j(\mathfrak{a})$ in B_f erzeugte Ideal. Ist $\mathfrak{p} \in D_+(f)$, so ist $\varphi(\mathfrak{p})$ ein Primideal in $B_{(f)}$. Das liefert eine Abbildung

$$\varphi : D_+(f) \to \operatorname{Spec} B_{(f)}.$$

Diese ist bijektiv. Man prüft nämlich leicht nach, dass für jedes Primideal $\mathfrak{q}$ in $B_{(f)}$ die Zuordnung $\mathfrak{q} \mapsto j^{-1}(\mathfrak{q}B_f)$ eine Umkehrabbildung liefert. Außerdem gilt für ein homogenes Ideal $\mathfrak{a}$ genau dann $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, wenn $\varphi(\mathfrak{a}) \subset \varphi(\mathfrak{p})$ gilt. Somit ist φ ein Homöomorphismus. □

Definition 2.11 Der $n-$dimensionale projektive Raum über einem Ring A ist definiert durch

$$\mathbb{P}_A^n = \text{ Proj } A[x_0, \ldots, x_n]$$

Wir nehmen jetzt der Konkretheit halber an, dass $A = k$ ein Körper ist, und untersuchen den projektiven Raum $\mathbb{P}_k^n$. Die Mengen $U_i = D_+(x_i)$ für $i = 0, \ldots, n$ bilden eine offene Überdeckung von $\mathbb{P}_k^n$. Wir haben oben gesehen, dass U_i homöomorph zu Spec $k[x_0, \ldots, x_n]_{(x_i)}$ ist. Wir schreiben nun $k[y_0, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n] = k[y_0, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n]$ für den Polynomring, dem die i-te Variable fehlt, und betrachten den Ringhomomorphismus

$$\varphi : k[x_0, \ldots, x_n]_{(x_i)} \to k[y_0, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n],$$

der für jedes homogene Polynom $f(x_0, \ldots, x_n)$ vom Grad d den Bruch

$$\frac{f(x_0, \ldots, x_n)}{x_i^d} \text{ auf } f(y_0, \ldots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \ldots, y_n)$$

abbildet. Dies ist ein Isomorphismus, denn der Ringhomomorphismus

$$\psi : k[y_0, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n] \to k[x_0, \ldots, x_n]_{(x_i)}$$

definiert durch $\psi(a\ y_0^{k_1} \cdots y_n^{k_n}) = \frac{a\ x_0^{k_1} \ldots x_n^{k_n}}{x_i^{k_1 + \ldots + k_n}}$, liefert eine Umkehrabbildung.

Beispiel 2.12 Für $i = 2$ ist etwa

$$\varphi\left(\frac{x_0^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{x_2^2}\right) = y_0^2 + y_1 + 1.$$

Vermöge des Isomorphismus

$$\varphi : k[x_0, \ldots, x_n]_{(x_i)} \to k[y_0, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n]$$

ist U_i homöomorph zu Spec $k[y_0, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n]$, also homöomorph zum Spektrum eines Polynomrings in n Variablen.
Die Abbildung

$$\text{Spec } [y_0, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n] \xrightarrow{\sim} U_i \hookrightarrow \mathbb{P}_k^n$$

bildet nach Konstruktion das maximale Ideal

$$(y_0 - a_0, \ldots, \widehat{y_i - a_i}, \ldots, y_n - a_n) \text{ in } k[y_0, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n]$$

(für $a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_n \in k$) auf das homogene Primideal

$$(x_k - a_k x_i)_{k \neq i}$$

in $k[x_0, \ldots, x_n]$ ab.

Ab jetzt bezeichnen wir in diesem Kapitel mit k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Lemma 2.13 Sei k algebraisch abgeschlossen und $\mathbb{P}^n_k(k)$ die Menge der abgeschlossenen Punkte in $\mathbb{P}^n_k$.
Die Abbildung

$$\big(k^{n+1} \backslash \{0\}\big)/k^\times \longrightarrow \mathbb{P}^n_k(k)$$

gegeben durch

$$[a_0 : \ldots : a_n] \mapsto (a_k x_j - a_j x_k)_{j,k \in \{0 \ldots n\}}$$

ist eine Bijektion. Hier schreiben wir $[a_0 : \ldots : a_n]$ für die Restklasse von $(a_0, \ldots, a_n) \in k^{n+1} \backslash \{0\}$. Also gilt $[a_0 : \ldots : a_n] = [\lambda a_0 : \ldots : \lambda a_n]$ für alle $\lambda \in k^\times$.

Beweis : Sei $[a_0 : \ldots : a_n] \in (k^{n+1} \backslash \{0\})/k^\times$ mit $a_i \neq 0$. Dann ist ohne Einschränkung $a_i = 1$ (ersetze alle a_j durch $\frac{a_j}{a_i}$). Das Ideal $(a_k x_j - a_j x_k)_{j,k}$ entspricht dem Ideal $(y_0 - a_0, \ldots, \widehat{y_i - a_i}, \ldots, y_n - a_n)$ unter $D_+(x_i) \simeq \operatorname{Spec} k[y_0, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n]$. Daher liefert dieses Ideal einen abgeschlossenen Punkt. Umgekehrt liegt jeder abgeschlossene Punkt von $\mathbb{P}^n_k$ in einem $D_+(x_i)$ und gehört also zu einem maximalen Ideal in $k[y_0 \ldots \hat{y}_i \ldots y_n]$. $\square$

Da wir die Menge $k^{n+1} \backslash \{0\}\big)/k^\times$ mit der Menge aller Geraden im k^{n+1} identifizieren können, indem wir die Restklasse von $(a_1, \ldots, a_n) \in k^{n-1} \backslash \{0\}$ auf die von diesem Vektor erzeugte Gerade abbilden, entspricht die Menge der abgeschlossenen Punkte im $\mathbb{P}^n_k$ der Menge aller Geraden im k^{n+1}.

Korollar 2.14 Sei $\mathfrak{a} \subset k[x_0, \ldots, x_n]$ ein homogenes Ideal. Unter der Bijektion

$$(k^{n+1} \backslash \{0\})/k^* \longrightarrow \mathbb{P}^n_k(k)$$

entspricht $V(\mathfrak{a}) \cap \mathbb{P}^n_k(k)$ der Menge

$$\{[a_o \ldots a_n] : f(a_0 \ldots a_n) = 0 \text{ für alle homogenen Elemente } f \in \mathfrak{a}\}$$

Beachte: Ist f homogen vom Grad d, so ist

$$f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, \ldots, a_n) \text{ für alle } \lambda \in k^\times$$

Also gilt $f(a_0, \ldots, a_n) = 0$ genau dann, wenn $f(\lambda a_o, \ldots, \lambda a_n) = 0$.
Ist $f(a_0, \ldots, a_n) \neq 0$, so ist i.a. $f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) \neq f(a_o, \ldots, a_n)$. Der Wert von f an einer beliebigen Äquivalenzklasse $[a_0 : \ldots : a_n]$ ist also nicht definiert.

Beweis : $V(\mathfrak{a}) \cap \mathbb{P}_k^n(k)$ entspricht unter der obigen Bijektion der Menge aller Äquivalenzklassen $[a_0 : \ldots : a_n]$ mit

$$\mathfrak{a} \subset (a_j x_k - a_k x_j)_{j,k}.$$

Nun folgt aus $\mathfrak{a} \subset (a_j x_k - a_k x_j)_{j,k}$, dass jedes homogene $f \in \mathfrak{a}$ eine Summe von Elementen der Form $g(a_j x_k - a_k x_j)$ für $g \in k[x_0, \ldots, x_n]$ homogen und geeignete j, k ist. Wegen $(a_j a_k - a_k a_j) = 0$, gilt daher $f(a_0 \ldots a_n) = 0$.
Umgekehrt gelte $f(a_0, \ldots, a_n) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{a}$ homogen. Wähle i mit $a_i \neq 0$, ohne Einschränkung ist $a_i = 1$.
Ist $f \in \mathfrak{a}$ homogen vom Grad d, so setzen wir $\tilde{f}(y_0, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n) = f(y_0, \ldots, 1, \ldots, y_n)$. Dann gilt $\tilde{f} \in (y_0 - a_0, \ldots, \widehat{y_i - a_i}, \ldots, y_n - a_n)$, denn aus $f(a_0, \ldots, a_n) = 0$ folgt $\tilde{f}(a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_n) = 0$. Daher gilt $f \in (x_0 - a_0 x_i, \ldots, \widehat{x_i - a_i} x_i, \ldots, x_n - a_n x_i) = (x_j - a_j x_i)_{j:j \neq i}$. Also ist $\mathfrak{a} \subset (x_j - a_j x_i)_{j:j\neq i} = (a_j x_k - a_k x_j)_{j,k}$. □

Beispiel 2.15 Eine Gerade im $\mathbb{P}_k^2 = \text{Proj} k[x_0, x_1, x_2]$ ist definiert als

$$V\big((\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\big)$$

für Koeffizienten $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in k^3 \backslash \{0, 0, 0\}$.

Lemma 2.16 Zwei verschiedene Geraden in der projektiven Ebene $\mathbb{P}_k^2$ schneiden sich genau in einem Punkt.

Beweis :

$$\begin{aligned} L_1 &= V(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \\ L_2 &= V(\beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) \end{aligned}$$

seien zwei verschiedene Geraden. Dann hat die Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \qquad \text{den Rang 2}$$

(Wären die Zeilen linear abhängig, so wären die Geraden gleich.)

Also ist $\dim\left(\text{Kern}\begin{pmatrix}\alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix} : k^3 \to k^2\right) = 1$

Sei $v = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ im Kern dieser Abbildung mit $v \neq 0$. Dann ist $[a_0 : a_1 : a_2]$ ein Punkt in $(k^3 \backslash \{0\})/k^\times$ mit

$$\begin{aligned} \alpha_0 a_1 + \alpha_1 a_2 + \alpha_3 a_3 &= 0 \\ \beta_0 a_1 + \beta_1 a_2 + \beta_3 a_3 &= 0, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Definition 2.17 Ist $f \in k[x_0, x_1, x_2]$ ein nicht konstantes homogenes Polynom, so heißt

$$C_f := V\big((f)\big) \subset \mathbb{P}_k^2$$

die projektive ebene Kurve zu f.

Der Grad des Polynoms heißt auch der Grad der Kurve. Wir werden später einen Dimensionsbegriff kennenlernen, mit dessen Hilfe wir C_f als eindimensional (daher Kurve) bezeichnen können. Hat f den Grad 3, so heißt C_f Kubik.
Vermöge der Abbildung

$$\begin{aligned} (k^3 \backslash \{0\})/k^\times &\longrightarrow \mathbb{P}_k^2(k) \\ [a_0 : a_1 : a_2] &\longmapsto (a_0x_1 - a_1x_0, a_1x_2 - a_2x_1, a_0x_2 - a_2x_0) \end{aligned}$$

fassen wir die Menge auf der linken Seite als Teilmenge von $\mathbb{P}_k^2$ ab.

Definition 2.18 C_f heißt singulär in $P = [a : b : c]$, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

i) $f(a, b, c) = 0$ (also $P \in C_f$)

ii) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a, b, c) = 0$ für $i = 0, 1, 2$

C_f heißt nicht-singular (oder glatt), falls C_f keine singulären Punkte enthält.
Beachte: Mit f sind auch alle partiellen Ableitungen homogen.

Definition 2.19 C_f sei eine nicht singuläre projektive Kurve und $P = [a : b : c] \in C_f$ ein abgeschlossener Punkt.
Die Gerade

$$V\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}(a, b, c)x_0 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a, b, c)x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a, b, c)\right)$$

heißt Tangente in P an C_f. Dies ist wohldefiniert, da P ein nicht-singulärer Punkt ist. In affinen Koordinaten, also auf U_0, U_1 oder U_2 erhält man den üblichen Tangentenbegriff.

Definition 2.20 Sei $L = V(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$ eine projektive Gerade und C_f eine projektive Kurve. Sei $P = [a : b : c]$ in L. Die Vielfachheit $m(P, L, C_f)$, mit der sich L und C_f in P schneiden, ist definiert als die Nullstellenordnung in 0 des Polynoms

$$\psi(t) = f(a + ta', b + tb', c + tb'),$$

wobei $P' = [a' : b' : c']$ ein (beliebiger) weiterer Punkt in L ist.

Beispiel 2.21 i) Ist $P \notin C_f$, so ist $f(a, b, c) \neq 0$, also $m(P, L, C_f) = 0$.

ii)
$$\begin{aligned}
f &= x_0^2 - x_1 x_2 - c x_2^2 \\
L &= V(x_0 - x_1 - c x_2) \\
P &= [1 : 1 - c : 1] \\
P' &= [-1 : -(1 + c) : 1] \\
\psi(t) &= f\big(1 - t, (1 - c) - t(1 + c), 1 + t\big) \\
&= (1 - t)^2 - (1 + t)[(1 - c) - t(1 + c)] - c(1 + t)^2 \\
&= 1 - 2t + t^2 - [(1 - c + t - tc) - t - tc - t^2 - t^2 c] - c - 2tc - t^2 \\
&= *t + \text{Rest} \\
&\Rightarrow m(P, L, C_f) = 1
\end{aligned}$$

iii)
$$\begin{aligned}
f &= x_0^2 - x_1 x_2 - c x_2^2 \\
L &= V(x_1 + c x_2) \\
P &= [0 : -c : 1] \\
P' &= [1 : -c : 1] \\
\psi(t) &= f\big(t, -c(1 + t), 1 + t\big) = t^2 + c(1 + t)(1 + t) - c(1 + t)^2 = t^2 \\
&\Rightarrow m(P, L, C_f) = 2
\end{aligned}$$

Allgemeiner gilt: L sei die Tangente in $P = [a : b : c]$ an C_f. Dann ist

$$m(P, L, C_f) \geqq 2,$$

denn für den Punkt $P' = [a' : b' : c'] \in L$ gilt $\psi(t) = f(a + ta', b + tb', c + tc')$, also nach der Kettenregel

$$\psi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a + ta', \ldots) a' + \frac{\partial f}{\partial y}(a + ta', \ldots) b' + \frac{\partial f}{\partial z}(a + ta' \ldots) c',$$

$$\text{also } \psi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) a' + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) b' + \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) c' = 0, \text{ da } P' \in L.$$

Definition 2.22 Eine elliptische Kurve ist eine nicht-singuläre Kurve C_f, wobei f homogen vom Grad 3 von der Gestalt

$$f(x, y, z) = y^2z + a_1xyz + a_3yz^2 - x^3 - a_2x^2z - a_4xz^2 - a_6z^3$$

(„Weierstraßgleichung") ist.

In Charakteristik $\neq 2, 3$ kann man mit einer Koordinatentransformation erreichen, dass f sich folgendermaßen vereinfacht

$$f(x, y, z) = y^2z - x^3 - axz^2 - bz^3$$

(Übungsblatt). Die zugehörige Kurve enthält immer den Punkt $O = [0 : 1 : 0]$. In $\{z \neq 0\}$ wird diese Gleichung zu $\tilde{f}(x, y) = y^2 - x^3 - ax - b$

Wir erinnern noch einmal daran, dass im Rest des Paragraphen k immer ein algebraisch abgeschlossener Körper ist.

Satz 2.23 Sei L eine Gerade in $\mathbb{P}^2_k$ und C_f eine elliptische Kurve. Dann ist

$$\sum_{P \in \mathbb{P}^2_k(k)} m(P, L, C_f) = 3$$

Beweis : Sei $L = V(\alpha x - \beta y + \gamma z)$ und $f = y^2z - x^3 - axz^2 - bz^3$ (in char $\neq 2, 3$ ok; andernfalls kann man den Beweis analog durchführen)

1.Fall Sei $\alpha = \beta = 0$, also $L = V(z)$. Sei $[a : b : c] = P \in L \cap C_f$. Dann ist $c = 0$ und $a^3 = 0$, also $a = 0$. Daher ist $P = O$ der einzige Schnittpunkt. Wir betrachten den zweiten Punkt $P' = [1 : 1 : 0]$ auf L. Dann ist $m(O, L, C_f) =$ Nullstellenordnung von $\psi(t) = f(t, 1, 0) = t^3$, also $m(O, L, C_f) = 3$.

2.Fall Sei $\alpha \neq 0$ und $\beta = 0$, also $L = V(\alpha x + \gamma z)$ sowie $[a : b : c] = P \in L \cap C_f$.
Ist $P = O = [0 : 1 : 0]$, so berechnen wir $m(P, L, C_f)$ mit $P' = [-\gamma : 0 : \alpha] \in L$. Das ergibt $m(P, L, C_f) = 1$.
Ist $P = [a : b : 1]$, so folgt aus $P \in L$, dass $\alpha a + \gamma = 0$, also $a = -\frac{\gamma}{\alpha}$ und $P = [-\frac{\gamma}{\alpha} : b : 1]$ gilt.
Berechne $m(P, L, C_f)$ mit dem Hilfspunkt $O = [0 : 1 : 0]$. Das liefert: $m(P, L, C_f) =$ Nullstellenordnung von $f(-\frac{\gamma}{\alpha}, b + t, 1)$ in 0.

Das ist ein Polynom vom Grad 2 in t. Es hat also entweder 2 verschiedene oder eine doppelte Nullstelle. Also $\sum_P m(P, L, C_f) = 3$.

3.Fall $\beta \neq 0$ analog, mit aufwändigeren Rechnungen. $\square$

Korollar 2.24 Für eine elliptische Kurve C_f gilt:

i) Seien P und Q zwei verschiedene Punkte auf C_f und L die projektive Gerade, die beide verbindet. Dann hat L (mit Vielfachheiten gezählt) noch einen dritten Schnittpunkt mit C_f.

ii) Sei L die Tangente an C_f im Punkt P. Dann hat L (mit Vielfachheiten gezählt) noch einen dritten Schnittpunkt mit C_f.

Beweis :

i) Sei $P \neq Q$ in C_f. Wegen $\sum\limits_{P\in\mathbb{P}_k^2(k)} m(P, L, C_f) = 3$ gilt dann entweder $\left\{\begin{array}{lcl} m(P, L, C_f) & = & 2 \\ m(Q, L, C_f) & = & 1 \end{array}\right\}$ oder $\left\{\begin{array}{lcl} m(P, L, C_p) & = & 1 \\ m(Q, L, C_p) & = & 2 \end{array}\right\}$ oder $m(P, L, C_p) = m(Q, L, C_p) = m(R, L, C_p) = 1$ für einen dritten Schnittpunkt R der Kurve mit L.

ii) Es ist $m(P, L, C_p) \geqq 2$. Für $m(P, L, C_p) = 3$ ist P selbst der dritte Schnittpunkt. Für $m(P, L, C_p) = 2$ gibt es ein $Q \neq P$ mit $m(Q, L, C_p) = 1$.

$\square$

Ist $P = [a : b : 1]$ ein Punkt ungleich $O = [0 : 1 : 0]$ auf der elliptischen Kurve C_f, so ist $V(x - az)$ die projektive Gerade, die P und O verbindet. $V(x - az) \cap D + (z)$ ist eine Parallele zur $y-$Achse.

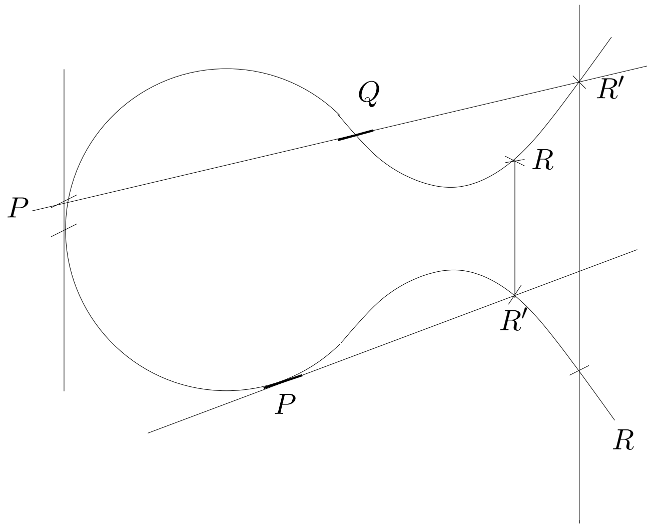
Definition 2.25 (Gruppengesetz auf einer elliptischen Kurve)

Sei C_f eine elliptische Kurve.

i) Für $P \neq O$ in C_f definieren wir einen Punkt $R = P \oplus Q$ auf C_f wie folgt: Wir legen eine projektive Gerade durch P und Q. Diese schneidet C_f (mit Vielfachheiten gezählt) in einem dritten Punkt R'. Nun legen wir eine Gerade durch R' und $O = [0 : 1 : 0] \in C_f$. Diese schneidet C_f in einem dritten Punkt R.

ii) Um $R = P \oplus P$ zu bestimmen, starten wir mit der Tangente in P an C_f und finden damit R'. Der Punkt R wird dann analog wie in Teil i) konstruiert.

In $\{z \neq 0\}$ sieht diese Konstruktion so aus:



$O = [0:1:0]$ ist der einzige Punkt in C_f, der nicht in $\{z \neq 0\}$ liegt. $L = V(z)$ ist die Tangente in O an C_f mit $m(O, L, C_f) = 3$, wie wir im Beweis von Satz 5.26 ausgerechnet haben. Also ist $O \oplus O = O$, und $O \oplus P$ erhält man so: Die Gerade durch O und P ist parallel zur $y-$Achse, also folgt $O \oplus P = P$.

Satz 2.26 Die abgeschlossenen Punkte in der elliptischen Kurve C_f bilden eine abelsche Gruppe unter $\oplus$ mit neutralem Element O.

3 Garben

Um zu definieren, was ein Schema ist, brauchen wir außer geeigneten topologischen Räumen auch noch den Begriff der Garbe.

Definition 3.1 Es sei T ein topologischer Raum. Eine **Prägarbe** $\mathcal{F}$ von abelschen Gruppen auf T besteht aus den folgenden Daten:

- einer abelschen Gruppe $\mathcal{F}(U)$ für jede offene Teilmenge $U \subset X$ und
- einem Gruppenhomomorphismus $\mathrm{res}_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ für jedes Paar offener Mengen $V \subset U$,

so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

i) $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$.

ii) $\mathrm{res}_{UU} = \mathrm{id}$ für alle $U \subset T$ offen.

iii) Für $W \subset V \subset U$ gilt

$$\mathrm{res}_{UW} = \mathrm{res}_{VW} \circ \mathrm{res}_{UV}.$$

Manchmal schreiben wir auch $f|_U$ statt $\mathrm{res}_{UV}(f)$ für $f \in \mathcal{F}(U)$. Die Elemente von $\mathcal{F}(U)$ nennt man auch **Schnitte über** U.

Beispiele:

1) Ist T ein topologischer Raum, so ist durch

$$\mathcal{F}_{\text{cont}}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \ \text{ stetig}\}$$

für $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}$ offen eine Prägarbe gegeben, wenn wir noch $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$ setzen. Für $V \subset U$ ist

$$\mathrm{res}_{UV} : \mathcal{F}_{\text{cont}}(U) \to \mathcal{F}_{\text{cont}}(V)$$

die Einschränkungsabbildung $f \mapsto f|_V$.

2) Ist $T = \mathbb{R}$ mit der reellen Topologie, so ist durch

$$\mathcal{F}_{\text{diff}}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \text{ differenzierbar}\}$$

(und $\mathcal{F}_{\text{diff}}(\emptyset) = 0$) eine Prägarbe, wobei

$$\mathrm{res}_{UV} : \mathcal{F}_{\text{diff}}(U) \to \mathcal{F}_{\text{diff}}(V)$$

wieder durch das Einschränken von Funktionen gegeben wird. Analog ist die Prägarbe $\mathcal{C}^1$ der stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ definiert.

3) Ist G eine beliebige abelsche Gruppe und T ein topologischer Raum, so ist durch $\mathcal{F}_G(U) = G$, falls $U \neq \emptyset$, sowie $\mathcal{F}_G(\emptyset) = 0$ und $\mathrm{res}_{UV} = \mathrm{id}_G$ für $\emptyset \neq V \subset U$ sowie $\mathrm{res}_{U\emptyset} = 0$ eine Prägarbe gegeben. Sie heißt **konstante Prägarbe**.

Definition 3.2 Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ von abelschen Gruppen auf dem topologischen Raum T heißt **Garbe**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

i) Sei $U \subset T$ offen, $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von U und $f \in \mathcal{F}(U)$. Ist $\mathrm{res}_{UU_i} f = 0$ für alle $i \in I$, so ist $f = 0$.

ii) Sei $U \subset T$ offen und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von U. Für jede Familie $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$, so dass

$$\mathrm{res}_{U_i\ U_i \cap U_j}(f_i) = \mathrm{res}_{U_j\ U_i \cap U_j}(f_j)$$

für alle $i \neq j$ gilt, existiert ein $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $\mathrm{res}_{UU_i}(f) = f_i$.

Das erste Garbenaxiom i) besagt, dass ein $f \in \mathcal{F}(U)$ eindeutig durch seine Einschränkungen auf alle Teilmengen einer offenen Überdeckung bestimmt ist.

Das zweite Garbenaxiom ii) besagt, dass sich eine Familie $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ von Schnitten über den offenen Teilmengen U_i einer Überdeckung von U zu einem $f \in \mathcal{F}(U)$ verkleben lässt, wenn die Einschränkung von f_i auf $U_i \cap U_j$ jeweils mit der Einschränkung von f_j auf $U_i \cap U_j$ übereinstimmt.

Beispiel: Im obigen Beispiel 1) ist die Prägarbe $\mathcal{F}_{\text{cont}}$ eine Garbe: Stetige reellwertige Funktionen sind offenbar durch ihre Einschränkung auf eine offene Überdeckung eindeutig bestimmt. Ist ferner $f_i \in \mathcal{F}_{\text{cont}}(U_i)$ für eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von U gegeben, so dass $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ gilt, so definieren wir

$$f(x) = f_i(x), \quad \text{falls } x \in U_i.$$

Das ist wohldefiniert, d.h. $f(x)$ hängt nicht von der Wahl eines i mit $x \in U_i$ ab. Da die Einschränkung von f auf alle U_i stetig ist, ist auch f stetig. Somit haben wir $f \in \mathcal{F}_{\text{cont}}(U)$ gefunden mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$.

Analog zeigt man, dass die Prägarbe $\mathcal{F}_{\text{diff}}$ aus dem obigen Beispiel 2) eine Garbe ist.

Ist $G \neq 0$ eine Gruppe, so muss die konstante Prägarbe $\mathcal{F}_G$ aus dem obigen Beispiel 3) keine Garbe sein. Das erste Garbenaxiom ist zwar erfüllt, das zweite jedoch nicht, wenn T zwei nicht-leere disjunkte offene Mengen U und V enthält. Dann wählen wir $g_1 \neq g_2$ in G und betrachten die Schnitte $g_1 \in \mathcal{F}_G(U) = G$ und $g_2 \in \mathcal{F}_G(V) = G$. Die offenen Mengen U und V bilden eine Überdeckung von $U \cup V$. Es gilt $U \cap V = \emptyset$, also $\mathrm{res}_{U\ U \cap V}(g_1) = 0 = \mathrm{res}_{V\ U \cap V}(g_2)$, aber es gibt kein $g \in \mathcal{F}_G(U \cup V) = G$ mit $g = \mathrm{res}_{U \cup V\ U}(g) = g_1$ und $g = \mathrm{res}_{U \cup V\ V}(g) = g_2$.

Definition 3.3 Es seien $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ Prägarben abelscher Gruppen auf dem topologischen Raum T.

i) Ein **Morphismus von Prägarben** $\alpha : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ ist eine Familie $(\alpha_U)_{U \subset T \text{ offen}}$ von Gruppenhomomorphismen

$$\alpha_U : \mathcal{F}_1(U) \to \mathcal{F}_2(U),$$

so dass für alle Paare $V \subset U$ von offenen Mengen das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_1(U) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d, "\mathrm{res}_{UV}"'] & \mathcal{F}_2(U) \arrow[d, "\mathrm{res}_{UV}"] \\ \mathcal{F}_1(V) \arrow[r, "\alpha_V"'] & \mathcal{F}_2(V) \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, d.h. es gilt

$$\mathrm{res}_{UV} \circ \alpha_U = \alpha_V \circ \mathrm{res}_{UV}.$$

ii) Ein **Morphismus von Garben** ist einfach ein Morphismus der zugrundeliegenden Prägarben.

iii) Ein Morphismus

$$\alpha = (\alpha_U)_{U \subset T \text{ offen}} : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$$

von Prägarben heißt **Isomorphismus**, falls es einen Morphismus

$$\beta = (\beta_U)_{U \subset T \text{ offen}} : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_1$$

von Prägarben gibt, so dass $\alpha_U \circ \beta_U = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_2(U)}$ und $\beta_U \circ \alpha_U = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_1(U)}$ für alle $U \subset T$ offen gilt.

Beispiele:

1) Für jedes $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}$ offen betrachten wir den Gruppenhomomorphismus

$\alpha_U : \mathcal{C}^1(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \text{ stetig differenzierbar}\} \to \mathcal{F}_{\text{cont}}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \text{ stetig}\},$

gegeben durch

$$f \mapsto f'.$$

Dann ist $\alpha = (\alpha_U)_{U \subset \mathbb{R} \text{ offen}}$ ein Morphismus von Garben von $\mathcal{C}^1$ nach $\mathcal{F}_{\text{cont}}$.

2) Sind G und H abelsche Gruppen und $\sigma : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, so definiert $\alpha_U = \sigma : \mathcal{F}_G(U) = G \to H = \mathcal{F}_H(U)$ für $U \neq \emptyset$ und $\alpha_\emptyset = 0$ einen Morphismus von Prägarben $\alpha : \mathcal{F}_G \to \mathcal{F}_H$.

Nun wollen wir den Halm einer Prägarbe $\mathcal{F}$ in einem Punkt $x \in T$ definieren. Dazu brauchen wir den Begriff des direkten Limes.

Definition 3.4 Eine (Index-)Menge I heißt **gerichtet**, falls sie durch eine Relation $\leqq$ partiell geordnet ist und falls für $i, j \in I$ immer ein $k \in I$ existiert mit $i \leqq k$ und $j \leqq k$.

Proposition 3.5 Es sei I eine gerichtete Indexmenge und $(G_i)_{i \in I}$ eine Familie abelscher Gruppen, so dass für alle $i \leqq j$ in I ein Gruppenhomomorphismus

$$\sigma_{ij} : G_i \to G_j$$

gegeben ist mit

i) $\sigma_{ii} = \mathrm{id}_{G_i}$ für alle i

ii) $\sigma_{ik} = \sigma_{jk} \circ \sigma_{ij}$ für alle $i \leqq j \leqq k$.

Man nennt dann $(G_i,\ \sigma_{ij})$ auch ein **gerichtetes System** abelscher Gruppen. Für ein solches gerichtetes System existieren

- eine abelsche Gruppe $\varinjlim G_i$ sowie
- Gruppenhomomorphismen
$$g_i : G_i \to \varinjlim G_i$$
für alle $i \in I$ mit $g_i = g_j \circ \sigma_{ij}$ für alle $i \leqq j$, so dass folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist.

  Sind eine abelsche Gruppe H und Gruppenhomomorphismen $h_i : G_i \to H$ mit $h_i = h_j \circ \sigma_{ij}$ für $i \leqq j$ gegeben, dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus
$$f : \varinjlim G_i \to H,$$

so dass $f \circ g_i = h_i$ ist für alle $i \in I$. Mit anderen Worten, das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[d, "\sigma_{ij}"'] \arrow[dr, "g_i"] \arrow[drr, bend left, "h_i"] & & \\ & \varinjlim G_i \arrow[r, "f"] & H \\ G_j \arrow[ur, "g_j"'] \arrow[urr, bend right, "h_j"'] & & \end{tikzcd}$$

ist kommutativ.

Man nennt $\varinjlim G_i$ den **direkten Limes** von (G_i, σ_{ij}).

Beweis : Man konstruiert die Gruppe $\varinjlim G_i$ als Quotienten von $\bigoplus_{i \in I} G_i$ nach der Untergruppe R, die von allen Elementen der Form $a_i - \sigma_{ij}(a_i)$ für $i \leqq j$ und $a_i \in G_i$ erzeugt wird. Die Abbildungen $g_i : G_i \to \varinjlim G_i$ kommen von den natürlichen Abbildungen $G_i \to \bigoplus_{i \in I} G_i$ her. Ist $a_{i_1} + \ldots + a_{i_r}$ für $i_1, \ldots, i_r \in I$ und $a_{i_j} \in G_{i_j}$ ein beliebiges Element in $\bigoplus_{i \in I} G_i$, so wählen wir ein $j \in I$ mit $i_1 \leqq j, \ldots, i_r \leqq j$. Dann gilt in $\varinjlim G_i = \bigoplus G_i / R$ die Gleichung $a_{i_1} + \ldots + a_{i_r} = \sigma_{i_1} a_{i_1} + \ldots + \sigma_{i_r} a_{i_r}$. Da die rechte Seite dieser Gleichung ein Element der G_j-Komponente ist, haben wir gezeigt, dass es für jedes $a \in \varinjlim G_i$ einen Index $j \in I$ und ein $a_j \in G_j$ gibt, so dass $a = g_j(a_j)$ gilt. Sind $h_i : G_i \to H$ wie oben gegeben, so faktorisiert der kanonische Gruppenhomomorphismus $\bigoplus_{i \in I} G_i \to H$ über $\varinjlim G_i$. Da jedes $a \in \varinjlim G_i$ von der Form $a = g_j(a_j)$ für ein $a_j \in G_j$ ist, ist der Homomorphismus $f : \varinjlim G_i \to H$ eindeutig bestimmt. $\square$

Definition 3.6 Es sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe abelscher Gruppen auf dem topologischen Raum T und $x \in T$. Dann ist die Menge aller offenen Umgebungen U von x mit der partiellen Ordnung $U \leqq V \Leftrightarrow V \subset U$ eine gerichtete Indexmenge. Für $U \leqq V$, also $V \subset U$ haben wir die Restriktionsabbildung $\mathrm{res}_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$. Also existiert der direkte Limes

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U).$$

Er heißt **Halm** von $\mathcal{F}$ in x.

Beispiel: Es sei G eine abelsche Gruppe und $\mathcal{F}_G$ die zugehörige konstante Prägarbe auf T. Dann ist $\mathcal{F}_x = G$ für alle $x \in T$.

Lemma 3.7 Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe abelscher Gruppen auf dem topologischen Raum T und sei $x \in T$.

i) Für jede offene Umgebung U von x gibt es eine natürliche Abbildung

$$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x.$$

Diese bezeichnen wir mit $s \mapsto s_x$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[dd, "\mathrm{res}_{UV}"'] \arrow[dr] & \\ & \mathcal{F}_x \\ \mathcal{F}(V) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

für $V \subset U$ ist kommutativ.

ii) Für jedes Element $c \in \mathcal{F}_x$ existiert eine offene Umgebung U von x und ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s_x = c$.

iii) Sind U und V offene Umgebungen von x sowie $s \in \mathcal{F}(U)$ und $t \in \mathcal{F}(V)$, dann ist $s_x = t_x$ genau dann, wenn es eine offene Umgebung W von x mit $W \subset U \cap V$ gibt, so dass $\mathrm{res}_{UW} s = \mathrm{res}_{UW} t$ gilt.

Beweis :

i) Nach Konstruktion des direkten Limes gibt es für jede offene Umgebung U von x einen Homomorphismus $g_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$, so dass für alle $U \leqq V$, d.h. $V \subset U$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[dd, "\mathrm{res}_{UV}"'] \arrow[dr] & \\ & \mathcal{F}_x \\ \mathcal{F}(V) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Diesen Homomorphismus bezeichnen wir mit $s \mapsto s_x$.

ii) Wir haben im Beweis von Proposition 3.5 gesehen, dass es für jedes $c \in \mathcal{F}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U)$ eine offene Umgebung U von x und ein $s \in \mathcal{F}(U)$ gibt, so dass $g_U(s) = c$, also $s_x = c$ gilt.

iii) Gilt $\mathrm{res}_{UW}s = \mathrm{res}_{VW}t$ für eine offene Teilmenge $W \subset U \cap V$, dann folgt $s_x = t_x$ nach Konstruktion des direkten Limes. Ist umgekehrt $s_x = t_x$, so liegt nach Konstruktion des direkten Limes

$$\mathcal{F}_x = \bigoplus_{x \in U} \mathcal{F}(U)/R$$

das Element $s-t$ in der Gruppe $R \subset \bigoplus_{x \in U} \mathcal{F}(U)$, die von allen Elementen der Form $f - \mathrm{res}_{\tilde{U}\tilde{V}} f$ für $\tilde{V} \subset \tilde{U}$ und $f \in \mathcal{F}(\tilde{U})$ erzeugt wird. Also ist $s - t$ eine endliche Summe solcher Differenzen, d.h.

$$s - t = (f_1 - \mathrm{res}_{U_1 V_1} f_1) + \ \dots\ + (f_r - \mathrm{res}_{U_r V_r} f_r)$$

mit $f_1 \in \mathcal{F}(U_1), \dots, f_r \in \mathcal{F}(U_r)$. Für $W = V_1 \cap \dots \cap V_r \cap U \cap V$ gilt somit $\mathrm{res}_{UW}s - \mathrm{res}_{UW}(t) = 0$, denn für alle i ist $\mathrm{res}_{U_i W} f_i = \mathrm{res}_{V_i W}(\mathrm{res}_{U_i V_i} f_i)$. Also ist $\mathrm{res}_{UW}s = \mathrm{res}_{UW}t$.

□

Lemma 3.8 Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf T und $U \subset T$ offen. Für $s, t \in \mathcal{F}(U)$ ist $s = t$ genau dann, wenn $s_x = t_x$ für alle $x \in U$ gilt.

Beweis : Aus $s = t$ folgt natürlich $s_x = t_x$ für alle $x \in U$. Gilt umgekehrt $s_x = t_x$ für alle $x \in U$, so gibt es nach Lemma 3.7 iii) eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von U, so dass $\mathrm{res}_{UU_i}(s) = \mathrm{res}_{UU_i}(t)$ für alle $i \in I$ gilt. Nach dem ersten Garbenaxiom folgt $s = t$. □

Lemma 3.9 Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Prägarben abelscher Gruppen auf dem topologischen Raum T. Ein Morphismus $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induziert für jedes $x \in T$ einen Gruppenhomomorphismus $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$, so dass für alle offenen Umgebungen U von x das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[d] \\ \mathcal{F}_x \arrow[r, "\alpha_x"'] & \mathcal{G}_x \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Beweis : Für alle offene Umgebungen U von x betrachten wir den Gruppenhomomorphismus $\beta_U : \mathcal{F}(U) \overset{\alpha_U}{\to} \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}_x$. Da α_U mit den Restriktionsabbildungen verträglich ist, kommutiert für alle $V \subset U$ offen das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[d, "\mathrm{res}_{UV}"'] \arrow[dr, "\beta_U"] & \\
& \mathcal{G}_x \\
\mathcal{F}(V) \arrow[ur, "\beta_V"'] &
\end{tikzcd}$$

Aufgrund der universellen Eigenschaft des direkten Limes $\mathcal{F}_x$ existiert also genau ein Homomorphismus $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$, so dass

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[d] \arrow[dr, "\beta_U"] & \\
\mathcal{F}_x \arrow[r, "\alpha_x"'] & \mathcal{G}_x
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Nach Konstruktion macht dieser das Diagramm aus der Behauptung kommutativ. $\square$

Nun wollen wir zeigen, wie man eine Prägarbe „garbifizieren" kann.

Definition 3.10 Es sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf einem topologischen Raum T. Dann definieren wir für jedes $U \subset T$ offen

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^+(U) \quad = \quad & \{\text{Funktionen } s : U \to \bigcup_{x \in U} \mathcal{F}_x, \text{so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:} \\
& i) \;\; s(x) \in \mathcal{F}_x \text{ für alle } x \in U \text{ und} \\
& ii) \;\; \text{für alle } x \in U \text{ existiert eine offene Umgebung} \\
& \qquad V \subset U \text{ und ein } t \in \mathcal{F}(V) \text{ mit } s_y = t_y \text{ für alle } y \in V\}.
\end{aligned}$$

$\mathcal{F}^+(U)$ besteht also aus allen Kollektionen $(s(x))_{x \in U}$ von Elementen $s(x) \in \mathcal{F}_x$, die lokal von einem Schnitt von $\mathcal{F}$ herkommen.

Lemma 3.11 In der Situation von Definition 3.10 gilt:

i) $\mathcal{F}^+$ ist eine Garbe auf T.

ii) Für jedes $U \subset T$ offen sei

$$\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}^+(U)$$

die Abbildung, die einem $s \in \mathcal{F}(U)$ die Funktion $x \mapsto s_x$ zuordnet. Dann ist φ ein Morphismus von Prägarben.

iii) Ist $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein beliebiger Morphismus von Prägarben und $\mathcal{G}$ eine Garbe, so existiert genau ein Morphismus $\beta : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathcal{G} \\ \mathcal{F}^+ \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

iv) Für jedes $x \in T$ ist die Abbildung der Halme

$$\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x^+$$

ein Isomorphismus.

v) Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe, so ist $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ ein Isomorphismus.

Beweis :

i) und ii) in den Übungen

iii) Es sei $\mathcal{G}$ eine Garbe und $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus. Für jede offene Teilmenge $U \subset T$ definieren wir eine Abbildung $\beta_U : \mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{G}(U)$ wie folgt: Zu $(s(x))_{x \in U}$ in $\mathcal{F}^+(U)$ wählen wir eine offene Überdeckung $U = \bigcup U_i$ sowie $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $(t_i)_x = s(x)$ für alle $x \in U_i$. Wir betrachten $r_i = \alpha_{U_i}(t_i) \in \mathcal{G}(U_i)$. Es ist $(r_i)_x = \alpha_x(t_i)_x = \alpha_x(s(x))$ für alle $x \in T$. Also ist $(\mathrm{res}_{U_i\, U_i \cap U_j} r_i)_x = (r_i)_x = (r_j)_x = (\mathrm{res}_{U_i\, U_i \cap U_j} r_j)_x$ für alle $x \in U_i \cap U_j$. Da $\mathcal{G}$ eine Garbe ist, folgt mit Lemma 3.8 $\mathrm{res}_{U_i\, U_i \cap U_j} r_i = \mathrm{res}_{U_i\, U_i \cap U_j} r_j$, also existiert nach dem zweiten Garbenaxiom ein $r \in \mathcal{G}(U)$ mit $\mathrm{res}_{U U_i} r = r_i$. Nach Lemma 3.8 ist $r \in \mathcal{G}(U)$ das einzige Element mit $r_x = \alpha_x(s(x))$ für alle $x \in T$. Daher ist r unabhängig von der Wahl der Überdeckung und der Wahl der t_i. Wir setzen $\beta_U(s) = r$. Das definiert einen Garbenmorphismus $\beta : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$. Ist $s \in \mathcal{F}(U)$, so kann man in obiger Konstruktion angewandt auf $\varphi(s)$ die triviale Überdeckung wählen und erhält $\beta \circ \varphi(s) = \alpha(s)$.

iv) Wir betrachten $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x^+$. Ist $a \in \mathcal{F}_x$ mit $\varphi_x(a) = 0$, so existiert nach Lemma 3.7 ii) eine offene Umgebung U von x und ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $a = s_x$. Dann ist $0 = \varphi_x(a) = (\varphi_U(s))_x$, also existiert nach Lemma 3.7 iii) eine offene Umgebung $V \subset U$ um x mit $\varphi_U(s)|_V = 0$. Also ist nach Definition von φ_U für alle $y \in V$ der Halm $s_y = 0$. Insbesondere ist $a = s_x = 0$. Daher ist φ_x injektiv. Ist $b \in \mathcal{F}_x^+$, so sei $s \in \mathcal{F}^+(U)$ ein Schnitt mit $s_x = b$. Nach Definition von $\mathcal{F}^+$ existiert eine offene Umgebung $V \subset U$ von x und ein $t \in \mathcal{F}(V)$ mit $s(y) = t_y$ für alle $y \in V$. Also ist nach Lemma 3.8 $\varphi_V(t) = \mathrm{res}_{UV}(s)$. Daher folgt $\varphi_x(t_x) = (\varphi_V(t))_x = (\mathrm{res}_{UV}(s))_x = s_x = b$.

v) in den Übungen.

$\square$

Beispiel: Wir wollen uns jetzt am Beispiel der konstanten Prägarbe klarmachen, was beim Übergang zur Garbifizierung passiert.

Es sei $T = \mathbb{R}$ (oder jeder andere lokal zusammenhängende topologische Raum) und G eine abelsche Gruppe, etwa $G = \mathbb{Z}$. Wir haben schon gesehen, dass die konstante Prägarbe $\mathcal{F}_\mathbb{Z}$ keine Garbe ist, denn wir können etwa die Schnitte $1 \in \mathcal{F}_\mathbb{Z}(]0,1[)$ und $2 \in \mathcal{F}_\mathbb{Z} \in (]1,2[)$ nicht zu einem Element in $\mathcal{F}_\mathbb{Z}(]0,1[\cup]1,2[) = \mathbb{Z}$ zusammenkleben. Nun ist $\mathcal{F}_{\mathbb{Z},x} = \mathbb{Z}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also ist
$\mathcal{F}_\mathbb{Z}^+(]0,1[\cup]1,2[) = \{(m_x)_{x\in]0,1[\cup]1,2[} : m_x \in \mathbb{Z}$, so dass für alle x eine offene Umgebung V_x in $]0,1[\cup]1,2[$ und ein $n \in \mathbb{Z}$ existiert mit $m_y = n$ für alle $y \in V_x\}$.

Für ein $(m_x)_x \in \mathcal{F}_\mathbb{Z}^+(]0,1[\cup]1,2[)$ und ein beliebiges $x \in]0,1[$ sei

$$\begin{aligned} U &= \{y \in]0,1[: m_y = m_x\} \quad \text{und} \\ V &= \{y \in]0,1[: m_y \neq m_x\} \end{aligned}$$

Diese Teilmengen sind disjunkt und offen in $]0,1[$ und es gilt $]0,1[= U \cup V$. Da $]0,1[$ zusammenhängend ist und $x \in U$, also $U \neq \emptyset$ gilt, folgt $U =]0,1[$ und $V \neq \emptyset$. Somit ist $(m_x)_{x\in]0,1[}$ konstant.
Genauso zeigt man, dass $(m_x)_{x\in]1,2[}$ konstant ist. Also folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^+_{\mathbb{Z}}(]0,1[\cup]1,2[) &= \{(m_x)_{x\in]0,1[\cup]1,2[} : \text{ es gibt } a,b\in\mathbb{Z} \text{ mit}\\ &\qquad m_x = a \text{ für alle } x\in]0,1[\text{ und}\\ &\qquad m_x = b \text{ für alle } x\in]1,2[\}\\ &\cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Die Abbildung $\varphi : \mathcal{F}_{\mathbb{Z}} \to \mathcal{F}^+_{\mathbb{Z}}$ vermittelt via

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(]0,1[\cup]1,2[) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{F}^+_{\mathbb{Z}}(]0,1[\cup]1,2[) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}\bigoplus\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

gerade die Diagonalabbildung $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, die durch $a\mapsto(a,a)$ gegeben wird.

Definition 3.12 Ein Morphismus $\alpha : \mathcal{F}\to\mathcal{G}$ von Prägarben abelscher Gruppen auf T heißt injektiv, wenn für jede offene Teilmenge $U\subset T$ der Gruppenhomomorphismus

$$\alpha_U : \mathcal{F}(U)\to\mathcal{G}(U)$$

injektiv ist.

<u>**Vorsicht:**</u> Der Begriff der Surjektivität ist komplizierter, wie wir später zeigen werden.

Proposition 3.13 Sei $\alpha : \mathcal{F}\to\mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben auf T. Dann gilt:

i) α ist genau dann injektiv, wenn für alle $x\in T$ die Halmabbildung $\alpha_x : \mathcal{F}_x\to\mathcal{G}_x$ injektiv ist.

ii) Falls für alle $x\in T$ die Halmabbildung $\alpha_x : \mathcal{F}_x\to\mathcal{G}_x$ surjektiv ist, so gibt es für jedes $U\subset T$ offen und für jedes $t\in\mathcal{G}(U)$ eine offene Überdeckung $U=\bigcup\limits_i U_i$ sowie $s_i\in\mathcal{F}(U_i)$ mit $\alpha_{U_i}(s_i)=\mathrm{res}_{UU_i}(t)$.

iii) α ist genau dann ein Isomorphismus, wenn für alle $x\in T$ die Halmabbildung $\alpha_x : \mathcal{F}_x\to\mathcal{G}_x$ ein Isomorphismus ist.

Beweis :

i) Angenommen, α ist injektiv und $a \in \mathcal{F}_x$ ist ein Element im Halm mit $\alpha_x(a) = 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von x und ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s_x = a$. Ferner gilt nach Lemma 3.9 $\alpha_U(s)_x = \alpha_x(s_x) = \alpha_x(a) = 0$, also gibt es nach Lemma 3.7 eine offene Umgebung $W \subset U$ von x mit $\text{res}_{UW}(\alpha_U(s)) = 0$. Da $\text{res}_{UW}(\alpha_U(s)) = \alpha_W(\text{res}_{UW}(s))$ ist und α_W injektiv ist, folgt $\text{res}_{UW}(s) = 0$, also $a = s_x = (\text{res}_{UW}(s))_x = 0$. Daher ist α_x injektiv.

   Umgekehrt nehmen wir an, alle Halmabbildungen $\alpha_x : \mathcal{F} \to \mathcal{G}_x$ sind injektiv. Sei $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\alpha_U(s) = 0$ gegeben. Für jedes $x \in U$ gilt dann $\alpha_x(s_x) = (\alpha_U(s))_x = 0$ woraus $s_x = 0$ folgt. Mit Lemma 3.8 folgt $s = 0$, d.h. α ist injektiv im Sinne von Definition 3.12.

ii) Angenommen, alle α_x sind surjektiv. Sei $t \in \mathcal{G}(U)$. Dann existiert für jedes $x \in T$ ein $r_x \in \mathcal{F}_x$ mit $\alpha_x(r_x) = t_x$. Nach Lemma 3.7 ii) gibt es eine offene Umgebung $W_x \subset U$ von x und ein $s(x) \in \mathcal{F}(W_x)$ mit $s(x)_x = r_x$. Der Keim von $\alpha_{W_x}(s(x)) \in G(W_x)$ in x ist gerade $\alpha_x(s(x)_x) = \alpha_x(r_x) = t_x$, also gleich dem Keim von $\text{res}_{UW_x} t$ in x. Nach Lemma 3.7 iii) existiert eine offene Umgebung $U_x \subset W_x$ von x mit

$$\begin{aligned} \text{res}_{UU_x} t &= \text{res}_{W_x U_x}(\alpha_{W_x}(s(x))) \\ &= \alpha_{U_x}(\text{res}_{W_x U_x} s(x)). \end{aligned}$$

   Mit der offenen Überdeckung $U = \bigcup\limits_{x \in U} U_x$ und den Schnitten $\text{res}_{W_x U_x} s(x)$ folgt die Behauptung.

iii) Ist α ein Isomorphismus, dann sind alle $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ Isomorphismen. Also müssen auch die Halmabbildungen $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ Isomorpismen sein. Wir nehmen umgekehrt an, alle α_x sind Isomorphismen und zeigen, dass dann alle $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ Isomorphismen sind. Nach i) ist jedes α_U injektiv. Sei $t \in \mathcal{G}(U)$. Nach ii) existiert eine offene Überdeckung $U = \bigcup\limits_i U_i$ und $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $\alpha_{U_i}(s_i) = \text{res}_{UU_i} t$. Nun ist $\alpha_{U_i \cap U_j}(\text{res}_{U_i\, U_i \cap U_j} s_i) = \text{res}_{U\, U_i \cap U_j} t = \alpha_{U_i \cap U_j}(\text{res}_{U_j\, U_i \cap U_j} s_j)$.
   Da $\alpha_{U_i \cap U_j}$ injektiv ist, folgt $\text{res}_{U_i\, U_i \cap U_j} s_i = \text{res}_{U_j\, U_i \cap U_j} s_j$. Nach dem zweiten Garbenaxiom existiert also ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\text{res}_{UU_i} s = s_i$ für alle i. Dann hat $\alpha_U(s)$ die Eigenschaft, dass $\text{res}_{UU_i}(\alpha_U(s)) = \alpha_{U_i}(\text{res}_{UU_i} s) = \alpha_{U_i}(s_i) = \text{res}_{UU_i}(t)$ gilt, woraus nach dem ersten Garbenaxiom $\alpha_U(s) = t$ folgt. Somit ist α_U auch surjektiv.

□

Definition 3.14 Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben auf T. $\mathcal{F}$ heißt **Untergarbe** von $\mathcal{G}$ ($\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$), falls für alle $U \subset T$ offen $\mathcal{F}(U)$ eine Untergruppe von $\mathcal{G}(U)$ ist und falls für alle $V \subset U$ offen die Restriktionsabbildung $\text{res}_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ durch Einschränken aus der Restriktionsabbildung $\text{res}_{UV} : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(V)$ hervorgeht.

Ist $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, so ist für alle $x \in T$ der Halm $\mathcal{F}_x$ eine Untergruppe von $\mathcal{G}_x$ (Übungsaufgabe).

Definition 3.15 Sei $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben. Dann definieren wir für alle $U \subset T$ offen

$$(\text{Kern}\,\alpha)(U) = \text{Kern}\,(\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)).$$

Lemma 3.16

i) Kern α definiert eine Garbe auf T und zwar eine Untergarbe von $\mathcal{F}$.

ii) Für jedes $x \in T$ gilt $(\text{Kern}\,\alpha)_x = \text{Kern}\,(\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x)$.

iii) α ist genau dann injektiv, wenn $\text{Kern}\,\alpha = 0$ gilt.

Beweis : in den Übungen. □

Jetzt wollen wir das Bild eines Garbenmorphismus $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ definieren. Wir definieren eine Prägarbe auf T durch

$$(\text{P-Bild}\,\alpha)(U) = \text{Bild}\,(\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$$

mit den Restriktionsabbildungen, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \text{Bild}\,(\alpha_U) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\text{res}_{UV}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\text{res}_{UV}"] \\ \text{Bild}\,(\alpha_V) \arrow[r, hook] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

kommutativ machen.

Leider ist P-Bild α im allgemeinen keine Garbe (siehe Übungen). Hier behelfen wir uns, indem wir zur Garbifizierung übergehen.

Definition 3.17 Es sei $\text{Bild}\,\alpha = (\text{P-Bild}\,\alpha)^+$ die Garbe, die zur Prägarbe P-Bild α assoziiert ist.

Mit φ : P-Bild $\alpha \to$ Bild α bezeichnen wir die kanonische Abbildung aus Lemma 3.11 ii). Wir haben einen natürlichen Prägarbenmorphismus j : P-Bild $\alpha \to \mathcal{G}$, der auf jedem $U \subset T$ offen durch die Inklusion j_U : (P-Bild $\alpha)(U) =$ Bild $\alpha_U \subset \mathcal{G}(U)$ gegeben ist. Nach Lemma 3.11 iii) existiert genau ein Garbenmorphismus i : Bild $\alpha \to \mathcal{G}$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \text{P-Bild}\,\alpha \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathcal{G} \\ & \text{Bild}\,\alpha \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Lemma 3.18 i) Für alle $x \in T$ induziert die Halmabbildung i_x : (Bild $\alpha)_x \to \mathcal{G}_x$ einen Isomorphismus (Bild $\alpha)_x \xrightarrow{\sim}$ Bild(α_x).

ii) Der Garbenmorphismus i : Bild $\alpha \to \mathcal{G}$ ist injektiv.

Beweis : In den Übungen. □

Definition 3.19 Ein Garbenmorphismus $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ heißt **surjektiv**, wenn für alle $x \in T$ die Halmabbildung $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ surjektiv ist.

Nach Proposition 3.13 ii) gilt: Ist $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein surjektiver Garbenmorphismus und $t \in \mathcal{G}(U)$, so gibt es eine offene Überdeckung $U = \bigcup\limits_i U_i$ und $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit

$$\alpha_{U_i}(s_i) = t|_{U_i} \quad \text{für alle } i.$$

Lemma 3.20 Ein Garbenmorphismus $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist genau dann surjektiv, wenn i : Bild $\alpha \to \mathcal{G}$ ein Isomorphismus ist.

Beweis : Ist α surjektiv, so sind definitionsgemäß alle α_x surjektiv. Nach Lemma 3.18 gilt also (Bild $\alpha)_x \cong$ Bild $\alpha_x = \mathcal{G}_x$ für alle $x \in T$. Der injektive Garbenmorphismus i : Bild $\alpha \to \mathcal{G}$ ist also ein Isomorphismus in allen Halmen. Nach Proposition 3.13 iii) ist

er ein Isomorphismus.
Falls umgekehrt $i : \text{Bild}\,\alpha \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$ gilt, so folgt aus Lemma 3.18 für jedes $x \in T$

$$\text{Bild}\,(\alpha_x) = \mathcal{G}_x,$$

d.h. alle α_x sind surjektiv. Daher ist α definitionsgemäß surjektiv. □

Ähnlich wie das Bild definieren wir nun Quotienten von Garben.

Definition 3.21 Es sei $\mathcal{F}$ eine Untergarbe von $\mathcal{G}$.

i) Wir setzen für alle $U \subset T$ offen

$$(\text{P} - \mathcal{G}/\mathcal{F})(U) = \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U).$$

Das definiert eine Prägarbe auf T.

ii) Es sei $\mathcal{G}/\mathcal{F} = (\text{P} - \mathcal{G}/\mathcal{F})^+$ die Garbifizierung. $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ heißt **Quotientengarbe** von $\mathcal{G}$ nach $\mathcal{F}$.

Die Quotientenabbildungen $\mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ induzieren einen Prägarbenmorphismus $q : \mathcal{G} \to \text{P} - \mathcal{G}/\mathcal{F}$. Diesen können wir mit dem kanonischen Morphismus $\varphi : \text{P} - \mathcal{G}/\mathcal{F} \to \mathcal{G}/\mathcal{F}$ verknüpfen und erhalten einen Morphismus $p = \varphi \circ q : \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{F}$.

Lemma 3.22 i) Für alle $x \in T$ ist $p_x : \mathcal{G}_x \to (\mathcal{G}/\mathcal{F})_x$ surjektiv mit $\text{Kern}\,p_x = \mathcal{F}_x$. Also ist $\mathcal{G}_x/\mathcal{F}_x \simeq (\mathcal{G}/\mathcal{F})_x$.

ii) Die Sequenz $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{F} \to 0$ ist exakt.

Beweis :

i) Da $\varphi_x : (\text{P}-\mathcal{G}/\mathcal{F})_x \to (\mathcal{G}/\mathcal{F})_x$ nach Lemma 3.11 iv) ein Isomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass $q_x : \mathcal{G}_x \to (\text{P} - \mathcal{G}/\mathcal{F})_x$ surjektiv mit Kern $\mathcal{F}_x$ ist. Sei $b \in (\text{P} - \mathcal{G}/\mathcal{F})_x$. Dann gibt es ein $s \in \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ für geeignetes $U \subset T$ offen mit $s_x = b$. Wir wählen ein $t \in \mathcal{G}(U)$ mit $q_U(t) = s$. Dann gilt $q_x(t_x) = (q_U(t))_x = s_x = b$. Also ist q_x surjektiv. Ist $a \in \mathcal{F}_x$, so gilt offenbar $q_x(a) = 0$. Ist umgekehrt $a \in \text{Kern}\,q_x \subset \mathcal{G}_x$, so existiert ein $s \in \mathcal{G}(U)$ mit $s_x = a$. Es gilt $q(s)_x = 0$, also existiert nach Lemma 3.7 iii) eine offene Umgebung V um x mit $q(s)|_V = 0$. Daher ist $s|_V \in \mathcal{F}(V)$, woraus $a = s_x \in \mathcal{F}_x$ folgt. Also gilt $\text{Kern}\,q_x = \mathcal{F}_x$.

ii) Klar. (Hoffentlich)

□

Wir wollen nun zum Abschluss dieses Kapitels Garben auf verschiedenen topologischen Räumen vergleichen.

Definition 3.23 Es sei $f : S \to T$ eine stetige Abbildung topologischer Räume.

i) Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe auf S, so definieren wir für jede offene Teilmenge $U \subset T$

$$(f_*\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U)).$$

Zusammen mit den von $\mathcal{F}$ induzierten Restriktionsabbildungen ist $f_*\mathcal{F}$ eine Garbe auf T. Sie heißt **direktes Bild von** $\mathcal{F}$.

ii) Es sei $\mathcal{G}$ eine Garbe auf T. Dann ist für jedes $U \subset S$ offen die Familie von abelschen Gruppen $\mathcal{G}(V)$, wobei V alle offenen Teilmengen von T mit $f(U) \subset V$ durchläuft, ein gerichtetes System abelscher Gruppen, wenn wir $V \leqq W \Leftrightarrow W \subset V$ setzen. Es sei $(\mathrm{P} - f^{-1}\mathcal{G})(U) = \varinjlim_{f(U) \subset V \text{ offen}} \mathcal{G}(V)$. Das definiert eine Prägarbe $\mathrm{P} - f^{-1}\mathcal{G}$ auf S. Die assoziierte Garbe $(\mathrm{P} - f^{-1}\mathcal{G})^+$ bezeichnen wir mit $f^{-1}\mathcal{G}$. Sie heißt das **Urbild von** $\mathcal{G}$.

4 Schemata

Es sei A ein Ring und $X = \operatorname{Spec} A$. Wir wollen nun eine Garbe $\mathcal{O}_X$ auf X definieren, so dass $\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f$ für alle $f \in A$ gilt. Nach §4 bilden die offenen Mengen der Form $D(f)$ eine Basis der Topologie, also läßt sich jede offene Teilmenge $U \subset X$ von ihnen überdecken. Es gilt $D(g) \subset D(f)$ genau dann, wenn $V((f)) \subset V((g))$, also nach Satz 1.7 genau dann, wenn $g \in \sqrt{f}$ ist, d.h. wenn $g^n = bf$ für ein $b \in A$ und ein $n \geqq 0$ gilt. Insbesondere folgt $D(f) = D(g)$ genau dann, wenn $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$ ist.

Für $D(g) \subset D(f)$ definieren wir nun eine Restriktionsabbildung wie folgt:

$$\begin{array}{rrcl} \operatorname{res}_{D(f)D(g)} : & A_f & \to & A_g \\ & a/f^k = ab^k/(bf)^k & \mapsto & ab^k/g^{nk}. \end{array}$$

Ist $D(f) = D(g)$, so ist diese Abbildung ein Isomorphismus. Wir wollen jetzt die Garbenaxiome für die offenen Basismengen $D(f)$ nachprüfen. Zunächst macht man sich leicht klar, dass für $D(h) \subset D(g) \subset D(f)$ auch $\mathrm{res}_{D(f)D(h)} = \mathrm{res}_{D(g)D(h)} \circ \mathrm{res}_{D(f)D(g)}$ gilt. Außerdem haben wir folgendes Resultat.

Proposition 4.1 Es sei $D(f) = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$ für Elemente f, f_i in A.

i) Ist $s \in A_f$ gegeben mit $\mathrm{res}_{D(f)D(f_i)} s = 0$ für alle $i \in I$, so folgt $s = 0$.

ii) Ist $s_i \in A_{f_i}$ für alle $i \in I$ gegeben mit $\mathrm{res}_{D(f_i)D(f_i f_j)} s_i = \mathrm{res}_{D(f_j)D(f_i f_j)} s_j$ für alle $i, j \in I$, so gibt es ein $s \in A_f$ mit $\mathrm{res}_{D(f)D(f_i)} s = s_i$ für alle $i \in I$.

Beweis : Nach den Übungen ist $D(f_i f_j) = D(f_i) \cap D(f_j)$, daher ist ii) analog zum zweiten Garbenaxiom.

Es sei $D(f) = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$ gegeben. Aus $D(f_i) \subset D(f)$ folgt $f_i^{n_i} = b_i f$ für geeignetes $n_i \geqq 0$ und $b_i \in A$. Da $D(f_i) = D(f_i^{n_i})$ und $A_{f_i} \simeq A_{f_i{}^{n_i}}$ gilt, können wir f_i durch $f_i^{n_i}$ ersetzen und $f_i = b_i f$ annehmen.

Aus $D(f) = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$ folgt $V((f)) = \bigcap_{i \in I} V((f_i)) \overset{1.2\,iv)}{=} V(\sum_{i \in I} (f_i))$, also ist $f \in \sqrt{\sum_{i \in I} (f_i)}$ nach Satz 1.7. Es gibt also ein $n \geqq 0$ und $i_1, \dots i_r \in I$ sowie $c_1, \dots, c_r \in A$ mit $f^n = c_1 f_{i_1} + \dots + c_r f_{i_r}$.

i) Sei $s = a/f^k \in A_f$ gegeben mit $0 = \mathrm{res}_{D(f)D(f_i)} s = a b_i^k / f_i^k$ in A_{f_i}. Nach Definition der Lokalisierung existiert ein $n_i \geqq 0$ mit $a b_i^k f_i^{n_i} = 0$ für alle $i \in I$. Wir wählen $N \geqq r(k + \max\{n_1, \dots, n_r\})$. Dann ist jeder Summand in $f^{nN} = (c_1 f_{i_1} + \dots + c_r f_{i_r})^N$ ein Vielfaches von $(c_j f_{i_j})^{k+n_j} = c_j^{k+n_j} f_{i_j}^k f_{i_j}^{n_j} = c_j^{k+n_j} b_{i_j}^k f^k f_{i_j}^{n_j}$ für ein j. Daher ist $a f^{nN} = 0$, woraus $s = a/f^k = 0$ in A_f folgt.

ii) Aus $f \in \sqrt{\sum_{j=1}^r (f_{i_j})}$ können wir wie oben schließen $D(f) = D(f_{i_1}) \cup \dots \cup D(f_{i_r})$. Also hat $(D(f_i))_{i \in I}$ eine endliche Teilüberdeckung. Daher können wir mit der im i) gezeigten Eindeutigkeit annehmen, dass I endlich ist. Sei also $D(f) = \bigcup_{i=1}^r D(f_i)$ und $f_i = b_i f$ für $b_i \in A$. Seien $s_i \in A_{f_i}$ gegeben mit $\mathrm{res}_{D(f_i)D(f_i f_j)} s_i = \mathrm{res}_{D(f_j)D(f_i f_j)} s_j$ für $i, j \in \{1, \dots, r\}$. Da nur endlich viele s_i auftreten, gibt es ein $k \geqq 0$, so dass $s_i = a_i / f_i^k$ für geeignete $a_i \in A$ gilt. Aus $a_i f_j^k / (f_i f_j)^k = a_j f_i^k / (f_i f_j)^k$ in $A_{(f_i f_j)}$ folgt, dass es ein $m_{i,j} \geqq 0$ gibt mit $(a_i f_j^k - a_j f_i^k)(f_i f_j)^{m_{ij}} = 0$.

Da nur endlich viele Indizes auftauchen, gibt es also ein $m \geqq 0$ mit

$$(a_i f_j^k - a_j f_i^k)(f_i f_j)^m = 0 \tag{1}$$

für alle $i, j \in \{1, ..., r\}$.
Da $D(f_i) = D(f_i^{k+m})$ ist, gilt $D(f) = \bigcup_{i=1}^{r} D(f_i^{k+m})$. Dies impliziert wie oben

$$f^n = \sum_{j=1}^{r} c_j f_j^{k+m}$$

für geeignete $n \geqq 1$ und $c_1, ..., c_r \in A$.

Wir setzen $a = \sum_{j=1}^{r} c_j f_j^m a_j \in A$ und behaupten, dass für $s = a/f^n$ gilt: $\text{res}_{D(f)D(f_i)} s = s_i$. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} b_i^n f_i^{k+m} a &= b_i^n (\sum_{j=1}^{r} c_j f_j^m a_j f_i^{k+m}) \\ &\overset{(1)}{=} b_i^n (\sum_{j=1}^{r} c_j a_i f_j^{k+m} f_i^m) \\ &= b_i^n a_i f_i^m (\sum_{j=1}^{r} c_j f_j^{k+m}) \\ &= b_i^n a_i f_i^m f^n \\ &= a_i f_i^{n+m}, \end{aligned}$$

also folgt $(a b_i^n f_i^k - a_i f_i^n) f_i^m = 0$. Daher ist $a b_i^n / f_i^n = a_i / f_i^k$ in A_{f_i}.
Somit ist tatsächlich $\text{res}_{D(f)D(f_i)} a/f^n = a_i/f_i^k = s_i$ für alle $i = 1, ..., r$.

□

Wir definieren nun für jedes $f \in A$

$$\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f.$$

Für eine beliebige offene Teilmenge $U \subset X$ setzen wir

$$\begin{aligned} &\mathcal{O}_X(U) \\ &= \{(s(f))_{f:D(f)\subset U} : s(f) \in A_f \text{ mit } \text{res}_{D(f)D(fg)} s(f) = \text{res}_{D(g)D(fg)} s(g) \text{ für alle } f, g \in A\}. \end{aligned}$$

Ist $V \subset U$ offen, so folgt aus $D(f) \subset V$ auch $D(f) \subset U$, und wir haben eine kanonische Restriktionsabbildung

$$res_{UV} : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V),$$

die das Tupel $(s(f))_{D(f)\subset U}$ auf das Teiltupel $(s(f))_{D(f)\subset V}$ abbildet.

Eine **Garbe von Ringen** auf einem topologischen Raum T ist eine Garbe $\mathcal{F}$ abelscher Gruppen, so dass alle $\mathcal{F}(U)$ Ringe und alle Restriktionsabbildungen Ringhomomorphismen sind.

Proposition 4.2 $\mathcal{O}_X$ ist eine Garbe von Ringen auf $X = \operatorname{Spec} A$.

Beweis : Da $\mathcal{O}_X(D_f) = A_f$ für alle $f \in A$ Ringe sind und die Restriktionsabbildungen $\mathcal{O}_X(D(f)) \to \mathcal{O}_X(D(g))$ Ringhomomorphismen sind, folgt leicht, dass alle $\mathcal{O}_X(U)$ Ringe und alle Restriktionsabbildungen res_{UV} Ringhomomorphismen sind. Man sieht ferner sofort, dass $\mathcal{O}_X(U)$ eine Prägarbe ist. Um das erste Garbenaxiom zu zeigen, sei $U = \bigcup\limits_{j\in J} U_j$ eine offene Überdeckung von U und $s \in \mathcal{O}_X(U)$ mit $s|_{U_j} = 0$ für alle $j \in J$. Dann ist auch $s|_{D(f)} = 0$ für jedes f mit $D(f) \subset U_j$. Sei nun $D(g) \subset U$ eine beliebige offene Basismenge. Dann ist für jedes $j \in J$ die Teilmenge $D(g) \cap U_j$ offen, daher kann sie mit Mengen der Form $D(f)$, die in U_j enthalten sind, überdeckt werden. Aus Proposition 4.1 folgt dann $s|_{D(g)} = 0$. Also ist $s = 0$.
Um das zweite Garbenaxiom zu zeigen, sei $s_j \in \mathcal{O}_X(U_j)$ gegeben mit $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$. Wieder sei $D(g) \subset U$ eine offene Basismenge. Dann überdecken wir jedes $D(g) \cap U_j$ mit Mengen der Form $D(f)$. Die Einschränkungen der s_j auf diese $D(f)$ lassen sich nach Proposition 4.1 zu einem $s(g) \in A_g = \mathcal{O}_X(D(g))$ verkleben. (Führen Sie dieses Argument aus!) Dann ist

$$(s(g))_{D(g)\subset U}$$

ein Element in $\mathcal{O}_X(U)$ mit $s|_{U_j} = s_j$ für alle j. $\square$

Proposition 4.3 Für jedes $\mathfrak{p} \in X = \operatorname{Spec} A$ ist $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \simeq A_\mathfrak{p}$, wobei $A_\mathfrak{p}$ die Lokalisierung von A nach $\mathfrak{p}$ ist.

Beweis : Es ist $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = \varinjlim\limits_{\mathfrak{p}\in U} \mathcal{O}_X(U) = \varinjlim\limits_{\mathfrak{p}\in D(f)} \mathcal{O}_X(D(f)) = \varinjlim\limits_{\mathfrak{p}\in D(f)} A_f$, denn die Mengen der Form $D(f)$ bilden nach §4 eine Basis der Zariski-Topologie. Ist $\mathfrak{p} \in D(f)$, so gilt $f \notin \mathfrak{p}$, also haben wir eine natürliche Abbildung

$$\begin{array}{rcll} A_f & \to & A_\mathfrak{p}, & \text{gegeben durch} \\ a/f^k & \mapsto & a/f^k. & \end{array}$$

Ist $\mathfrak{p} \in D(g) \subset D(f)$, so ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A_f \arrow[r] \arrow[d, "\text{res}"'] & A_{\mathfrak{p}} \\ A_g \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

kommutativ. Aufgrund der universellen Eigenschaft des direkten Limes existiert also ein Homomorphismus

$$\varphi : \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = \varinjlim_{\mathfrak{p} \in D(f)} A_f \to A_{\mathfrak{p}},$$

so dass für alle $f \in A$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A_f \arrow[r] \arrow[d] & A_{\mathfrak{p}} \\ \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Jedes Element in $A_{\mathfrak{p}}$ ist von der Form a/h mit $h \notin \mathfrak{p}$, also ist a/h im Bild von $A_h \to A_{\mathfrak{p}}$. Daher ist φ surjektiv. Ist $x \in \varinjlim_{\mathfrak{p} \in D(f)} A_f$ ein Element mit $\varphi(x) = 0$, so gibt es ein h mit $h \notin \mathfrak{p}$, so dass x das Bild von $a/h \in A_h$ unter der natürlichen Abbildung $A_h \to \varinjlim_{\mathfrak{p} \in D(f)} A_f$ ist. Dann ist $a/h = \varphi(x) = 0$ in $A_{\mathfrak{p}}$, also existiert ein $g \notin \mathfrak{p}$ mit $ag = 0$. Dann ist aber $D(gh) \subset D(h)$ und $\text{res}(a/h) = ag/gh = 0$ in A_{gh}. Also ist $x = 0$, d.h. φ ist auch injektiv. $\square$

Beispiele:

1) Es sei $A = k$ ein Körper. Dann ist $X = \operatorname{Spec} k = \{0\}$ als topologischer Raum eine Einpunktmenge. Die Garbe $\mathcal{O}_X$ ist festgelegt durch

$$\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X(D(1)) = k.$$

Mit Hilfe der Garbe $\mathcal{O}_X$ bekommt man also die Information zurück, um welchen Körper es sich handelt.

2) Es sei $A = \mathbb{Z}$. Da $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist, ist jede abgeschlossene Teilmenge von $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ von der Form $V((f))$ für ein $f \in \mathbb{Z}$. Also ist jede offene Teilmenge U von X von der Form $U = D(f)$. Es gilt definitionsgemäß

$$\mathcal{O}_X(U) = \mathbb{Z}_f = \{\frac{a}{f^k} : a \in \mathbb{Z}, k \geqq 0\} \subset \mathbb{Q}.$$

Ferner ist $D(g) \subset D(f)$ genau dann, wenn $g^n = bf$ für ein $n \geqq 0$ und ein $b \in \mathbb{Z}$. Also ist jeder Primteiler von f auch ein Primteiler von g und die Restriktionsabbildung $\mathrm{res}_{D(f)D(g)}$ ist die Inklusion $\mathbb{Z}_f \subset \mathbb{Z}_g \subset \mathbb{Q}$. Eine rationale Zahl $\frac{a}{b}$ mit $b \neq 0$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ liegt genau dann in $\mathcal{O}_X(D(f)) = \mathbb{Z}_f$, wenn jeder Primteiler von b auch f teilt.

3) Es sei k ein Körper und $A = k[T]$ der Polynomring in einer Variablen über k. Da $k[T]$ ein Hauptidealring ist, ist jede nicht-leere offene Teilmengen $U \subset X = \mathrm{Spec}\,[T]$ von der Form $U = D(f)$ für ein $f \in k[T]$, $f \neq 0$. Es gilt also

$$\mathcal{O}_X(U) = k[T]_f,$$

wobei $k[T]_f$ die Menge aller Funktionen im rationalen Funktionenkörper $k(T) = \mathrm{Quot}(k[T])$ ist, die sich als g/f^n für ein $g \in k[T]$ und ein $n \geqq 0$ schreiben lassen. Als euklidischer Ring ist $k[T]$ faktoriell. $k[T]_f$ besteht also genau aus den rationalen Funktionen $g/h \in k(T)$, für die $\mathrm{ggT}(g, h) = 1$ ist und für die jeder Primfaktor von h ein Teiler von f ist.
Ist k algebraisch abgeschlossen, so können wir jede rationale Funktion durch Auswerten als Funktion von k nach $k \cup \{\infty\}$ betrachten. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz können wir die Menge der maximalen Ideale in $\mathrm{Spec}\,k$ mit k identifizieren. Für jedes $h \in k[T]$ ist $h(a) = 0$ genau dann, wenn h im Ideal $(T - a)$ liegt. Also ist für $U = D(f)$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(U) = \quad \{ \quad & g/h \in k[T] : \text{ Die rationale Funktion } g/h : k \to k \cup \{\infty\} \\ & \text{hat keinen Pol in } U \}. \end{aligned}$$

4) Wir betrachten nun noch $A = \mathbb{Z}[T]$. Dieser Ring ist kein Hauptidealring. Für jede Primzahl p ist $(T, p) \subset A$ ein maximales Ideal. In $X = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[T]$ betrachten wir $U = X \setminus \{(T, p)\} = D(p) \cup D(T)$. Da $\mathbb{Z}[T]$ ein Integritätsring ist, sind wieder alle Restriktionsabbildungen Inklusionen von Teilmengen von Quot $(\mathbb{Z}[T])$. Also ist

$$\mathcal{O}_X(U) = \mathbb{Z}[T]_p \cap \mathbb{Z}[T]_T \subset \mathrm{Quot}(\mathbb{Z}[T]).$$

Ist $0 \neq f/g \in \mathbb{Z}[T]_p \cap \mathbb{Z}[T]_T$, so gilt $f/g = \frac{h_1}{p^n} = \frac{h_2}{T^m}$ für $n, m \geqq 0$ und $h_1, h_2 \in \mathbb{Z}[T] \setminus \{0\}$. Wir können nach eventuellem Kürzen annehmen, dass T nicht h_2 und p nicht h_1 teilt. Aus dieser Gleichung folgt $T^m h_1 = p^n h_2$, also $n = m = 0$ aufgrund der Annahmen. Somit ist $\mathcal{O}_X(U) = \mathbb{Z}[T] = \mathcal{O}_X(X)$.

Wir schreiben auch $\mathbb{A}_k^n = \operatorname{Spec} k[T_1, ..., T_n]$ und nennen diesen Raum den **„n-dimensionalen affinen Raum über k"**.

Wir wollen nun noch folgende Tatsache festhalten, die in den Beispielen schon klar geworden ist:

Lemma 4.4 Es sei A ein Integritätsring und $K = \operatorname{Quot} A$. Mit $\xi \in X = \operatorname{Spec} A$ bezeichnen wir den Punkt zum Nullideal. Dann ist $\mathcal{O}_{X,\xi} = K$. Für jede offene nicht-leere Teilmenge $U \subset X$ gilt $\xi \in U$, und der kanonische Ringhomomorphismus

$$\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}_{X,\xi}$$

ist injektiv. Für alle $V \subset U$ offen ist die Restriktionsabbildung

$$\operatorname{res}_{UV} : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$$

injektiv.

Beweis : Nach Proposition 4.3 gilt $\mathcal{O}_{X,\xi} = A_{(0)} = \operatorname{Quot}(A) = K$. Ist $U \neq \emptyset$ offen, so gibt es ein $0 \neq f \in A$ mit $D(f) \subset U$. Es folgt $0 \in D(f) \subset U$. Ferner ist $\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f \subset K$. Also ist die Halmabbildung $\mathcal{O}_X(D(f)) \to \mathcal{O}_{X,\xi}$ injektiv. Für eine beliebige offene Teilmenge $\emptyset \neq U \subset X$ sei $s = (s(f))_{D(f) \subset U} \in \mathcal{O}_X(U)$ mit $s_\xi = 0$. Dann ist $s(f)_\xi = (\operatorname{res}_{UD(f)} s)_\xi = 0$ für alle $i \in I$, woraus $s(f) = 0$ folgt. Also ist $s = 0$, d.h. die Halmabbildung

$$\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,\xi} = K$$

ist injektiv.
Daraus folgt, dass auch alle Restriktionsabbildungen injektiv sind. $\square$

Definition 4.5 Ein **geringter Raum** ist ein Paar $(X, \mathcal{O}_X)$, bestehend aus einem topologischen Raum X und einer Garbe von Ringen $\mathcal{O}_X$ auf X. Ein geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt **lokal geringter Raum**, falls für jedes $x \in X$ der Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ ein lokaler Ring ist.

Beispiel: Für jeden Ring A ist $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ ein lokal geringter Raum. Wir bezeichnen ihn meist einfach als $\operatorname{Spec} A$.

Definition 4.6 Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum und $x \in X$ ein Punkt, so sei $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ das eindeutig bestimmte maximale Ideal im lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$. Dann ist $\kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ ein Körper. Wir nennen $\kappa(x)$ den **Restklassenkörper** von X in x.

Beispiel: Ist $X = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, so ist $\kappa((0)) = \mathbb{Q}$. Für jede Primzahl p ist $\kappa((p)) = \mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{F}_p$, wobei $p\mathbb{Z}_{(p)}$ das von $p = p/1$ erzeugte Ideal in $\mathbb{Z}_{(p)}$ bezeichnet. Dieses ist gleich $S^{-1}(p)$ für $S = \mathbb{Z} \setminus (p)$.

Definition 4.7 Ein **Morphismus**

$$(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

geringter Räume besteht aus einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ und einem Garbenmorphismus $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ von Ringgarben auf Y.

Sind $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ und $(g, g^\sharp) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ Morphismen geringter Räume, so ist die Verknüpfung $(g, g^\sharp) \circ (f, f^\sharp)$ definiert durch die stetige Abbildung $g \circ f : X \to Z$ und den Garbenmorphismus

$$\mathcal{O}_Z \xrightarrow{g^\sharp} g_*\mathcal{O}_Y \xrightarrow{g_*(f^\sharp)} g_*(f_*\mathcal{O}_X),$$

wobei $(g_*f^\sharp)_V = f^\sharp_{g^{-1}(V)}$ ist.

Ist $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus geringter Räume, so haben wir für jedes $V \subset Y$ offen einen Ringhomomorphismus

$$f^\sharp_V : \mathcal{O}_Y(V) \to f_*\mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)).$$

Ist $x \in f^{-1}(V)$, dann induziert dies einen Homomorphismus

$$\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \to \mathcal{O}_{X,x}.$$

Nach der universellen Eigenschaft des direkten Limes erhalten wir einen Ringhomomorphismus der Halme

$$f^H_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}.$$

Definition 4.8 Ein Morphismus

$$(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

geringter Räume heißt **Morphismus lokal geringter Räume**, falls für jedes $x \in X$ die Abbildung

$$f^H_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

ein lokaler Homomorphismus ist, d.h. falls gilt $(f^H_x)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_{f(x)}$.

Definition 4.9 Ein **Isomorphismus**

$$(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

(lokal) geringter Räume ist ein Morphismus (lokal) geringter Räume, für den ein Morphismus

$$(g, g^\sharp) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$$

(lokal) geringter Räume existiert, so dass

$$\begin{aligned}(f, f^\sharp) \circ (g, g^\sharp) &= \mathrm{id}_{(Y,\mathcal{O}_Y)} \quad \text{und} \\ (g, g^\sharp) \circ (f, f^\sharp) &= \mathrm{id}_{(X,\mathcal{O}_X)}\end{aligned}$$

gilt.

Also ist $(f, f^\sharp)$ genau dann ein Isomorphismus, wenn $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus und $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ ein Isomorphismus von Garben ist.

Definition 4.10

i) Ein **affines Schema** ist ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, der isomorph zu $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ für einen kommutativen Ring A ist.

ii) Ein **Schema** ist ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, so dass es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X gibt, so dass $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ für alle $i \in I$ ein affines Schema ist. Die Garbe $\mathcal{O}_X|_{U_i}$ ist hier die Einschränkung von $\mathcal{O}_X$ auf U_i (wie in den Übungen besprochen).

iii) Ein Morphismus bzw. Isomorphismus von Schemata ist einfach ein Morphismus bzw. Isomorphismus lokal geringter Räume.

Bisher haben wir als Beispiele für Schemata nur affine Schemata kennengelernt. Wir werden später auch Schemata untersuchen, die nicht affin (sondern „projektiv“) sind.

Wir bezeichnen ein Schema oft nur mit dem unterliegenden topologischen Raum und denken uns die Garbe mit. Wir schreiben also X statt $(X, \mathcal{O}_X)$.

Lemma 4.11 Es sei $X = \operatorname{Spec} A$ ein affines Schema und $g \in A$. Dann ist die offene Teilmenge $D(g) \subset \operatorname{Spec} A$, zusammen mit der Garbe $\mathcal{O}_X|_{D(g)}$ ein affines Schema, das isomorph zu $\operatorname{Spec} A_g$ ist.

Beweis : Es sei $Y = \text{Spec}\, A_g$ und $j : A \to A_g$ der kanonische Ringhomomorphismus. Wir betrachten die dadurch induzierte stetige Abbildung $\text{Spec}\, A_g \to \text{Spec}\, A$, gegeben durch $\mathfrak{p} \mapsto j^{-1}(\mathfrak{p})$. Diese Abbidung induziert eine Bijektion (Übungsaufgabe)

$$i : \text{Spec}\, A_g \to D(g).$$

Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A_g, so ist $i(V(\mathfrak{a})) = V(j^{-1}(\mathfrak{a})) \cap D(g)$, also bildet i abgeschlossene Teilmengen auf abgeschlossene Teilmengen ab. Somit ist i ein Homöomorphismus.
Für jedes $h \in A$ mit $D(h) \subset D(g)$ gilt $h^n = bg$ für ein $b \in A$ und ein $n \geqq 0$. Nach Lemma 1.5 gilt $i^{-1}(D(h)) = D(j(h))$. Mit $(A_g)_{j(h)}$ bezeichnen wir die Lokalisierung von A_g nach $j(h)$. Dieser Ring besteht aus allen Elementen der Form $(1/h^k)\,(a/g^m) = a/h^k g^m$ für $a \in A$ und $k, m \geqq 0$. Man zeigt leicht, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} (A_g)_{j(h)} & \to & A_h \\ a/h^k g^m & \mapsto & ab^m/h^{k+nm} \end{array}$$

ein Isomorphismus ist.
Also ist $\mathcal{O}_X(D(h)) = A_h \simeq (A_g)_{j(h)} = \mathcal{O}_Y(D(j(h))) = \mathcal{O}_Y(i^{-1}D(h))$. Man rechnet leicht nach, dass für $D(h_2) \subset D(h_1)$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(D(h_1)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\text{res}"'] & \mathcal{O}_Y(i^{-1}D(h_1)) \arrow[d, "\text{res}"] \\ \mathcal{O}_X(D(h_2)) \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{O}_Y(i^{-1}D(h_2)) \end{tikzcd}$$

kommutiert.
Also erhalten wir für jede offene Teilmenge $U \subset D(g)$ einen Isomorphismus

$$i^\sharp_U : \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\text{Spec}\, A_g}(i^{-1}U),$$

der mit den Restriktionsabbildungen verträglich ist. Daher ist $(i, i^\sharp) : \text{Spec}\, A_g \to (D(g), \mathcal{O}_X|_{D(g)})$ ein Isomorphismus lokal geringter Räume. Da $(D(g), \mathcal{O}_X|_{D(g)})$ ein Schema ist (Übungsaufgabe), handelt es sich um einen Isomorphismus von Schemata. □

Jetzt wollen wir für jeden Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ einen Schemamorphismus $f : \text{Spec}\, B \to \text{Spec}\, A$ definieren. Dabei gehen wir ähnlich vor wie im Beweis von Lemma 4.11. Nach Lemma 4.5 induziert φ eine stetige Abbildung $f : \text{Spec}\, B \to \text{Spec}\, A$ der topologischen Räume. Diese ist definiert als $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$.

Proposition 4.12 Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ die zugehörige stetige Abbildung. Dann gibt es einen Garbenmorphismus

$$f^\sharp : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \to f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B},$$

so dass $(f, f^\sharp) : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ ein Morphismus von Schemata ist.
Wir erhalten die Abbidung φ zurück als $\varphi = f^\sharp_{\operatorname{Spec} A} : A = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A) \to f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(\operatorname{Spec} B) = B$.

Beweis : Für jedes $g \in A$ ist $f^{-1}(D(g)) = D(\varphi(g))$ nach Lemma 4.5. Der Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ induziert auf natürliche Weise einen Homomorphismus

$$\begin{array}{rcl} f^\sharp_{D(g)} : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(g)) = A_g & \to & B_{\varphi(g)} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(f^{-1}D(g)) = f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(D(g)) \\ a/g^n & \mapsto & \varphi(a)/\varphi(g)^n. \end{array}$$

Diese Homomorphismen sind verträglich mit den Restriktionsabbildungen für $D(g_1) \subset D(g_2)$, wie man leicht nachrechnet.
Also induzieren sie für jedes $U \subset \operatorname{Spec} A$ offen einen Homomorphismus

$$f^\sharp_U : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(U) \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(f^{-1}U) = f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(U),$$

der mit den Restriktionsabbildungen verträglich ist.
Für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$ ist die Halmabbildung

$$\begin{array}{rcl} f^H_{\mathfrak{p}} : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A, \varphi^{-1}(\mathfrak{p})} = A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} & \to & B_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B, \mathfrak{p}} \quad \text{gegeben durch} \\ a/f & \mapsto & \varphi(a)/\varphi(f), \end{array}$$

denn diese wird im direkten Limes durch die Abbildung $f^\sharp_{D(g)}$ für $\mathfrak{p} \in D(g)$ induziert.
Nun ist $(f^H_{\mathfrak{p}})^{-1}(\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})}$, also ist $f^H_{\mathfrak{p}}$ ein lokaler Homomorphismus. Also ist $(f, f^\sharp) : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ ein Morphismus lokal geringter Räume, d.h. ein Schemamorphismus. Da $\operatorname{Spec} A = D(1)$ ist, folgt in der Tat

$$f^\sharp_{\operatorname{Spec} A} = \varphi : A \to B.$$

□

Definition 4.13 Ein Morphismus von Schemata $f : X \to Y$ heißt **offene Immersion**, falls es eine offene Teilmenge $U \subset Y$ und einen Isomorphismus

$$\tilde{f} : (X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} (U, \mathcal{O}_Y|_U)$$

gibt, so dass f die Verknüpfung von $\tilde{f}$ mit der Inklusion $i : (U, \mathcal{O}_Y|_U) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist.

Beispiel: Ist $Y = \operatorname{Spec} A$ für einen Ring A und $g \in A$, so induziert nach Lemma 4.11 der kanonische Ringhomomorphismus $j : A \to A_g$ einen Schemamorphismus $f : \operatorname{Spec} A_g \to \operatorname{Spec} A$, der eine offene Immersion ist. Das offene Unterschema von $\operatorname{Spec} A$, welches isomorph zu $\operatorname{Spec} A_g$ ist, ist hier $(D(g), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}|_{D(g)})$.

Definition 4.14 Ein Morphismus von Schemata $f : X \to Y$ heißt **abgeschlossene Immersion**, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

i) Es gibt eine abgeschlossene Teilmenge $Z \subset Y$, so dass f einen Homöomorphismus $f : X \to Z$ vermittelt.

ii) Der Garbenmorphismus $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ ist surjektiv.

Das Paradebeispiel für abgeschlossene Immersionen wird in folgenden Lemma diskutiert.

Lemma 4.15 Es sei A ein Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Der Ringhomomorphismus $\varphi : A \to A/\mathfrak{a}$ induziert nach Proposition 4.12 einen Schemamorphismus $f : \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \to \operatorname{Spec} A$. Dieser ist eine abgeschlossene Immersion.

Beweis : Die stetige Abbildung $f : \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \to \operatorname{Spec} A$ ist gegeben durch $\mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in $A/\mathfrak{a}$ gilt $\mathfrak{a} \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, also $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \in V(\mathfrak{a}) \subset \operatorname{Spec} A$. Umgekehrt gibt es für jedes Primideal $\mathfrak{q}$ in A mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}$ ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $A/\mathfrak{a}$ (nämlich $\mathfrak{p} = \varphi(\mathfrak{q})$) mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$. Also induziert f eine bijektive stetige Abbildung

$$\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \to V(\mathfrak{a}).$$

Man rechnet leicht nach, dass für jedes Ideal $\mathfrak{b} \subset A/\mathfrak{a}$ die abgeschlossene Teilmenge $V(\mathfrak{b})$ in $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$ unter f auf $V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$ abgebildet wird. Also ist diese Abbildung ein Homöomorphismus.
Jetzt betrachten wir den Garbenmorphismus $f^\sharp : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \to f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}}$. Für jede offene Menge $U \subset \operatorname{Spec} A \setminus V(\mathfrak{a})$ ist $f^{-1}(U) = \emptyset$, also ist $f^\sharp_U$ surjektiv. Somit ist auch für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A \setminus V(\mathfrak{a})$ die Halmabbildung $f^H_\mathfrak{q}$ surjektiv.
Ist $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{a})$, so gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $A/\mathfrak{a}$ mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$. Die Halmabbildung $f^H_\mathfrak{q}$ ist dann gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} f^H_\mathfrak{q} : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A, \varphi^{-1}(\mathfrak{p})} = A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} & \to & (A/\mathfrak{a})_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}, \mathfrak{p}} \\ a/f & \mapsto & \varphi(a)/\varphi(f). \end{array}$$

Da φ surjektiv ist, ist auch diese Halmabbildung surjektiv.
Also ist der Garbenmorphismus $f^\sharp$ surjektiv auf den Halmen und damit definitionsgemäß surjektiv. Daher ist $f : \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \to \operatorname{Spec} A$ eine abgeschlossene Immersion. $\square$

Definition 4.16 Es sei X ein Schema.

i) Ein **offenes Unterschema** von X ist ein Schema der Form $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ für eine offene Teilmenge $U \subset X$.

ii) Ein **abgeschlossenes Unterschema** von X ist ein Schema der Form $(Z, \mathcal{O}_Z)$ für eine abgeschlossene Teilmenge $Z \subset X$ zusammen mit einer abgeschlossenen Immersion

$$(f, f^\sharp) : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X),$$

wobei $f : Z \to X$ die Inklusionsabbildung ist.

Die Strukturgarbe eines offenen Unterschemas von X ist also eindeutig bestimmt als Einschränkung der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$.
Auf einer abgeschlossenen Teilmenge $Z \subset X$ kann es aber mehrere Strukturgarben $\mathcal{O}_Z$ geben, die Z zu einem abgeschlossenen Unterschema machen.

Beispiel: Die abgeschlossene Teilmenge $\{3\} \subset \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ wird zusammen mit der konstanten Garbe $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und zusammen mit der konstanten Garbe $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ein abgeschlossenes Unterschema von $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Im ersten Fall ist das abgeschlossene Unterschema isomorph zu $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_3$, im zweiten Fall zu $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

Definition 4.17 Es sei S ein Schema. Ein **S-Schema** (oder ein Schema über S) ist ein Schema X zusammen mit einem Morphismus $\pi : X \to S$. Der Morphismus π heißt **Strukturmorphismus** und S wird auch **Basisschema** genannt. Ein Morphismus von $S-$Schemata von $\pi : X \to S$ nach $\sigma : Y \to S$ ist ein Schemamorphismus $f : X \to Y$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \arrow[dl, "\sigma"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Sind X, Y Schemata, so bezeichnen wir mit $\mathrm{Mor}\,(X, Y)$ die Menge aller Schemamorphismen von X nach Y. Sind X und Y $S-$Schemata, so bezeichnen wir mit $\mathrm{Mor}_S\,(X, Y)$ die Menge aller $S-$Schemamorphismen von X nach Y.

Für jedes $S-$Schema X schreiben wir

$$X(S) = \mathrm{Mor}_S(S, X)$$

für die Menge der $S-$Schemata Morphismen von S nach X.

Für zwei Ringe A, B setzen wir

$$\mathrm{Hom}_{\text{Ringe}}(A, B) = \{\varphi : A \to B \text{ Ringhomomorphismus}\}.$$

Wir haben in Proposition 4.12 jedem $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\text{Ringe}}(A, B)$ ein Element $(f, f^\sharp)$ in Mor(Spec B, Spec A) zugeordnet. Umgekehrt können wir für beliebige Schemata X und Y jedem Schemamorphismus $f : X \to Y$ einen Ringhomomorphismus $f^\sharp_Y : \mathcal{O}_Y(Y) \to (f_*\mathcal{O}_X)(X) = \mathcal{O}_X(f^{-1}Y) = \mathcal{O}_X(X)$ zuordnen.

Lemma 4.18 Sind $X = \mathrm{Spec}\, B$ und $Y = \mathrm{Spec}\, A$ affine Schemata, so sind diese beiden Konstruktionen invers zueinander. Also ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\text{Ringe}}(A, B) \to \mathrm{Mor}(\mathrm{Spec}\, B, \mathrm{Spec}\, A)$$

aus Proposition 4.12 bijektiv.

Beweis : Ist $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\text{Ringe}}(A, B)$ gegeben, so hat der Morphismus $f : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ aus Proposition 4.12 die Eigenschaft $f^\sharp_Y = \varphi$. Ist $f : X \to Y$ gegeben, so müssen wir noch zeigen, dass wir f erhalten, indem wir die Konstruktion aus Proposition 4.12 auf den Ringhomomorphismus $f^\sharp_Y : A \to B$ anwenden. Es sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, B$ und $\mathfrak{q} = f(\mathfrak{p}) \in \mathrm{Spec}\, A$. Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y(Y) = A & \xrightarrow{f^\sharp_Y} & B = \mathcal{O}_X(X) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{O}_{Y,f(\mathfrak{p})} = A_\mathfrak{q} & \xrightarrow[f^H_\mathfrak{p}]{} & B_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \end{array}$$

kommutativ. Ist $a \in A \setminus \mathfrak{q}$, so ist das Bild von a in $A_\mathfrak{q}$ invertierbar, wird also unter $f_\mathfrak{p}^H$ auf ein invertierbares Element abgebildet. Da dies von $f_Y^\sharp(a) \in B$ induziert wird, folgt $f_Y^H(a) \notin \mathfrak{p}$. Somit folgt

$$\begin{array}{rcl} f_Y^\sharp(A \setminus \mathfrak{q}) & \subset & B \setminus \mathfrak{p}, \quad \text{also auch} \\ (f_Y^\sharp)^{-1}(\mathfrak{p}) & \subset & \mathfrak{q}. \end{array}$$

Nun ist $f_\mathfrak{p}^H$ lokal, d.h. das Urbild des maximalen Ideals $\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$ in $B_\mathfrak{p}$ ist das maximale Ideal $\mathfrak{q}A_\mathfrak{q}$, also folgt für alle $a \in \mathfrak{q}$ nach dem obigen Diagramm $f_Y^\sharp(a)/1 = f_\mathfrak{p}^H(a/1) \in \mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$, woraus $f_Y^\sharp(a) \in \mathfrak{p}$ folgt. Somit ist $(f_Y^\sharp)^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$.

Also ist die stetige Abbildung $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ tatsächlich die durch den Ringhomomorphismus $f_Y^\sharp : A \to B$ induzierte. Ist $g \in A$, so gilt also $f^{-1}(D(g)) = D(f_Y^\sharp(g))$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_Y(Y) = A \arrow[r, "f_Y^\sharp"] \arrow[d] & B = (f_*\mathcal{O}_X)(Y) \arrow[d] \\ \mathcal{O}(D(g)) = A_g \arrow[r, "f_{D(g)}^\sharp"'] & B_{f_Y^\sharp(g)} = (f_*\mathcal{O}_X)D(g) \end{tikzcd}$$

kommutiert, da $f^\sharp$ ein Garbenmorphismus ist. Nach der universellen Eigenschaft der Lokalisierung stimmt also $f_{D(g)}^\sharp$ mit der Abbildung

$$\begin{array}{rcl} A_g & \to & B_{f_Y^\sharp(g)} \\ a/g^n & \mapsto & f_Y^\sharp(a)/f_Y^\sharp(g)^n \end{array}$$

überein, die dasselbe Diagramm kommutativ macht. Nach Proposition 4.12 ist also der durch $f_Y^\sharp$ induzierte Garbenmorphismus $\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ auf allen offenen Mengen der Form $D(g)$ gerade die Abbildung $f^\sharp$. Da zwei Garbenschnitte gleich sind, wenn sie auf einer offenen Überdeckung gleich sind, stimmen die beiden Garbenmorphismen überall überein. $\square$

Proposition 4.19 Es sei $Y = \operatorname{Spec} B$ ein affines Schema und X ein beliebiges Schema. Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Mor}(X, Y) & \to & \operatorname{Hom}_{\text{Ringe}}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X)) \\ f & \mapsto & f_Y^\sharp \end{array}$$

bijektiv.

Beweis : Es ist $X = \bigcup_i U_i$ für affine Schemata U_i. Für jeden Index i ist also nach Lemma 4.18

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mor}(U_i, Y) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ringe}}(B, \mathcal{O}_X(U_i)) \\ f & \mapsto & f_Y^\sharp \end{array}$$

bijektiv.
Bezeichnen wir mit $f_i : U_i \to Y$ die Verknüpfung von f mit der offenen Immersion $U_i \to X$, so gilt

$$(f_i^\sharp)_Y = \mathrm{res}_{XU_i} \circ f_Y^\sharp.$$

Sind nun $f, g \in \mathrm{Mor}(X, Y)$ mit $f_Y^\sharp = g_Y^\sharp$ gegeben, so folgt $(f_i^\sharp)_Y = (g_i^\sharp)_Y$, also $f_i = g_i$. Daher ist $f = g$ (Übungsaufgabe).
Ist umgekehrt ein Ringhomomorphismus $\varphi : B \to \mathcal{O}_X(X)$ gegeben, so liegt $\varphi_i = \mathrm{res}_{XU_i} \circ \varphi : B \to \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(U_i)$ in $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ringe}}(B, \mathcal{O}_X(U_i))$. Also existiert ein Schemamorphismus $f_i : U_i \to Y$ mit $(f_i^\sharp)_Y = \varphi_i$. Ist $V \subset U_i \cap U_j$ eine offene affine Teilmenge, so kommen $f_i|_V : V \hookrightarrow U_i \to Y$ und $f_j|_V : V \hookrightarrow U_j \to Y$ beide von dem Ringhomomorphismus $\mathrm{res}_{XV} \circ \varphi$ her, sie stimmen also nach Lemma 4.18 überein. Also können wir die $f_i : U_i \to Y$ zu einem Morphismus $f : X \to Y$ zusammensetzen (Übungsaufgabe). Da $\mathrm{res}_{XU_i} \circ f_Y^\sharp = (f_i^\sharp)_Y = \varphi_i = \mathrm{res}_{XU_i} \circ \varphi$ für alle i gilt, folgt $f_Y^\sharp = \varphi$. Also ist die betrachtete Abbildung auch surjektiv. □

5 Projektive Schemata

Jetzt wollen wir eine Garbe von Ringen auf $\mathrm{Proj}\, B$ definieren, die $\mathrm{Proj}\, B$ zu einem Schema macht. Für jedes homogene Element $f \in B_+$ sei

$$D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}\, B : f \notin \mathfrak{p}\} = \mathrm{Proj}\, B \setminus V((f)).$$

Die offenen Mengen $D_+(f)$ für homogene $f \in B_+$ bilden eine Basis der Topologie auf $\mathrm{Proj}\, B$, d.h. jede offene Umgebung U eines Punktes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}\, B$ enthält ein $D_+(f)$. Dies sieht man folgendermaßen ein. Es gilt $U = \mathrm{Proj}\, B \setminus V(\mathfrak{a})$ für ein homogenes Ideal $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$. Falls $\mathfrak{a} \cap B_+ \subset \mathfrak{p}$, so folgt $\mathfrak{a} \cap B_0 \not\subset \mathfrak{p}$, da $\mathfrak{a}$ homogen ist. Also existiert ein $f \in \mathfrak{a} \cap B_0$ mit $f \notin \mathfrak{p}$. Da $B_+ \not\subset \mathfrak{p}$ ist, gibt es zusätzlich ein $g \in B_+$ mit $g \notin \mathfrak{p}$. Also folgt $fg \notin \mathfrak{p}$, aber $fg \in \mathfrak{a} \cap B_+$. Das steht im Widerspruch zur Annahme $\mathfrak{a} \cap B_+ \subset \mathfrak{p}$. Diese ist also falsch. Für $f \in \mathfrak{a} \cap B_+$ mit $f \notin \mathfrak{p}$ folgt nun $\mathfrak{p} \in D_+(f) \subset U$.
Wir setzen $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\, B}(D_+(f)) = B_{(f)} = \{\frac{a}{f^n} \in B_f : \deg a = n \deg f\}$ für jedes homogene Element f, siehe Definition 2.8. Jetzt wollen wir Restriktionsabbildungen definieren.

Wir nehmen nun an, für homogene Elemente $f, g \in B_+$ gilt $D_+(g) \subset D_+(f)$. Dann folgt $V((f)) \subset V((g))$, also mit Lemma 2.9 $(g) \cap B_+ \subset \sqrt{(f)}$. Insbesondere ist $g \in \sqrt{(f)}$, d.h. es gilt $g = bf^n$ für ein $b \in B$ und ein $n \geqq 0$. Da f und g homogen sind, können wir b homogen wählen. Die natürliche Abbildung $B_f \to B_g$ induziert einen Ringhomomorphismus

$$\text{res}_{D_+(f)D_+(g)} : \mathcal{O}_{\text{Proj}\,B}(D_+(f)) = B_{(f)} \to B_{(g)} = \mathcal{O}_{\text{Proj}\,B}(D_+(g)).$$

Lemma 5.1 Es gelte $D_+(f) = \bigcup_{i \in I} D_+(f_i)$ für homogene Elemente $f, f_i \in B_+$.

i) Ist $s \in B_{(f)}$ mit $\text{res}_{D_+(f)D_+(f_i)} s = 0$ für alle $i \in I$, so ist $s = 0$.

ii) Sind $s_i \in B_{(f_i)}$ gegeben mit $\text{res}_{D_+(f_i)D_+(f_if_j)} s_i = \text{res}_{D_+(f_j)D_+(f_if_j)} s_j$ für alle $i, j \in I$, so existiert ein $s \in B_{(f)}$ mit $\text{res}_{D_+(f)D_+(f_i)} s = s_i$ für alle $i \in I$.

Beweis : Das folgt aus Proposition 4.1. □

Nun definieren wir wie im Falle von Spektren

$$\begin{aligned} &\mathcal{O}_{\text{Proj}\,B}(U) \\ &= \{(s(f))_{f: D_+(f) \subset U} : s(f) \in B_{(f)} \text{ und } res_{D_+(f)D_+(fg)} s(f) = res_{D_+(g)D_+(fg)} s(g)\} \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Lemma 5.1 folgt, dass $\mathcal{O}_{\text{Proj}\,B}$ eine Garbe auf B ist.

Lemma 5.2 Sei $\mathfrak{p} \in \text{Proj}\,B$. Dann gilt für den Halm von $\mathcal{O}_{\text{Proj}\,B}$ in $\mathfrak{p}$

$$\mathcal{O}_{\text{Proj}\,B,\mathfrak{p}} \simeq B_{(\mathfrak{p})}.$$

Beweis : Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\text{Proj}\,B,\mathfrak{p}} &= \varinjlim_{\mathfrak{p} \in U \text{ offen}} \mathcal{O}_{\text{Proj}\,B}(U) \\ &= \varinjlim_{\substack{f \notin \mathfrak{p} \\ f \in B_+ \text{ homogen}}} \mathcal{O}_{\text{Proj}\,B}(D_+(f)) \\ &= \varinjlim_{\substack{f \notin \mathfrak{p} \\ f \in B_+ \text{ homogen}}} B_{(f)} \simeq B_{(\mathfrak{p})}. \end{aligned}$$

mit demselben Argument wie in Proposition 4.3. □

Der Ring $B_{(\mathfrak{p})}$ ist lokal mit maximalem Ideal

$$\{\frac{b}{c} : b \in \mathfrak{p}, c \notin \mathfrak{p}, b \text{ und } c \text{ homogen vom selben Grad}\}.$$

Also ist $\operatorname{Proj} B$ ein lokal geringter Raum.

Proposition 5.3 Es sei $f \in B_+$ ein homogenes Element. Dann ist $(D_+(f), \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} B}|_{D_+(f)})$ als lokal geringter Raum isomorph zu $\operatorname{Spec} B_{(f)}$.

Beweis : Wir haben in Proposition 2.10 gesehen, dass die Abbildung

$$\varphi : D_+(f) \to \operatorname{Spec} B_{(f)},$$

gegeben durch $\varphi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}B_f \cap B_{(f)}$, ein Homöomorphismus ist.
Wir zeigen nun, dass für alle $D_+(g) \subset D_+(f)$ gilt $\varphi(D_+(g)) = D(\alpha)$, wobei $\alpha = g^r/f^m \in B_{(f)}$ mit $r = \operatorname{grad}(f)$ und $m = \operatorname{grad}(g)$ ist. Ist $\mathfrak{p} \in D_+(f)$ mit $g \in \mathfrak{p}$, so ist offenbar $\alpha \in \mathfrak{p}\, B_f \cap B_{(f)} = \varphi(\mathfrak{p})$. Ist $\mathfrak{p} \in D_+(f)$ mit $g \notin \mathfrak{p}$, so rechnet man nach, dass $\alpha \notin \mathfrak{p}B_f \cap B_{(f)}$ gilt. Somit folgt $\varphi(D_+(g)) = D(\alpha)$.
Aus $D_+(g) \subset D_+(f)$ folgt $g^n = fb$ für ein $n \geqq 0$ und ein $b \in B$. Da g und f homogen sind, können wir b homogen wählen, indem wir nur die Komponente im Grad $mn - r$ betrachten.
Der Ringhomomorphismus $\operatorname{res}_{D_+(f)D_+(g)} : B_{(f)} \to B_{(g)}$ bildet $\alpha = \frac{g^r}{f^m}$ auf das invertierbare Element $\frac{g^r b^m}{g^{mn}}$ in $B_{(g)}$ ab. Nach der universellen Eigenschaft der Lokalisierung induziert er also einen Homomorphismus $\varphi^\sharp_{D_+(g)} : (B_{(f)})_\alpha \to B_{(g)}$. Eine etwas mühselige, aber elementare Rechnung zeigt, dass diese Ringhomomorphismen $\varphi^\sharp_{D_+(g)}$ mit den Restriktionsabbildungen verträglich und Isomorphismen sind. Also können wir sie zu einem Garbenisomorphismus

$$\varphi^\sharp : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B_{(f)}} \to \varphi_* \mathcal{O}_{D_+(f)}$$

zusammensetzen. □

Korollar 5.4 $(\operatorname{Proj} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} B})$ ist ein Schema.

Beweis : Der lokal geringter Raum $(\operatorname{Proj} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} B})$ besitzt nach Proposition 5.3 eine offene Überdeckung aus affinen Schemata. □

Lemma 5.5 Ist B eine graduierte A-Algebra, so ist Proj B ein A-Schema.

Beweis : Der Ringhomomorphismus $\alpha : A \to B$, der B zu einer A-Algebra macht, landet definitionsgemäß in B_0. Für jedes homogene $f \in B_+$ induziert α also einen Ringhomomorphismus $\alpha : A \to B_{(f)}$ definiert durch $\alpha(a) = a/1$. Diese Ringhomomorphismen vertragen sich mit der Restriktionsabbildung für $D_+(g) \subset D_+(f)$. Also erhalten wir einen Ringhomomorphismus

$$A \to \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\,B}(\mathrm{Proj}\,B).$$

Nach 4.19 induziert dieser einen Schemamorphismus Proj $B \to$ Spec A. □

Beispiel: Es sei A ein Ring und $B = A\,[x_0, ..., x_n]$ der Polynomring mit der oben definierten Graduierung. Dann ist $B_+ = (x_0, ..., x_n)$. Jedes homogene Primideal $\mathfrak{p}$ in B mit $B_+ \not\subset \mathfrak{p}$ enthält mindestens eines der x_k nicht, liegt also in mindestens einem $D_+(x_k)$. Somit bilden $D_+(x_0), ..., D_+(x_n)$ eine offene Überdeckung von Proj B. Sei $k \in \{0, ..., n\}$. Dann ist

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\,B}(D_+(x_k)) = A\,[x_0 ..., x_n]_{(x_k)}.$$

Im folgenden bedeutet das Zeichen ^ über einer Variable, dass diese weggelassen werden soll. Wir haben einen Isomorphismus

$$A\,[x_0, ..., x_n]_{(x_k)} \to A\,\left[\frac{x_0}{x_k}, ..., \widehat{\frac{x_k}{x_k}}, ..., \frac{x_n}{x_k}\right],$$

der für ein Element

$$\frac{\sum\limits_{I=(i_0,...,i_n),\, i_0+...+i_n=d} a_I x_0^{i_0} ... x_n^{i_n}}{x_k^d}$$

gegeben ist durch

$$\frac{\sum_I a_I\, x_0^{i_0} ... x_n^{i_n}}{x_k^d} \mapsto \sum_I a_I \left(\frac{x_0}{x_k}\right)^{i_0} ... \left(\widehat{\frac{x_k}{x_k}}\right)^{i_k} ... \left(\frac{x_n}{x_k}\right)^{i_n}.$$

Die Umkehrabbildung wird auf Monomen gegeben durch

$$\frac{a\, x_0^{i_0} ... \widehat{x_k}^{i_k} ... x_n^{i_n}}{x_k^{i_0+...+i_n}} \mapsto a \left(\frac{x_0}{x_k}\right)^{i_0} ... \left(\widehat{\frac{x_k}{x_k}}\right)^{i_k} ... \left(\frac{x_n}{x_k}\right)^{i_n}.$$

Daher wird der projektive Raum $\mathbb{P}^n_A$ von $n+1$ Kopien des affinen Raums $\mathbb{A}^n_A$ überdeckt.

Lemma 5.6 Es seien $B = \bigoplus_{d \geqq 0} B_d$ und $C = \bigoplus_{d \geqq 0} C_d$ graduierte Ringe und $\varphi : B \to C$ ein graduierter Homomorphismus, d.h. es gibt ein $r \geqq 1$ mit $\varphi(B_d) \subset C_{rd}$ für alle $d \geqq 0$. Es sei $\mathfrak{a}$ das homogene Ideal $\mathfrak{a} = \varphi(B_+)\, C$ in C. Dann induziert φ einen Morphismus von Schemata

$$f : \operatorname{Proj} C \setminus V(\mathfrak{a}) \to \operatorname{Proj} B.$$

Für jedes homogene $b \in B_+$ gilt $f^{-1}(D_+(b)) = D_+(\varphi(b))$ und $f|_{D_+(\varphi(b))}$ ist gerade der Morphismus affiner Schemata, der durch den Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} B_{(b)} & \to & C_{\varphi(b)} \\ a/b^k & \mapsto & \varphi(a)/\varphi(b)^k \end{array}$$

induziert wird.

Beweis : Ist $\mathfrak{p}$ ein homogenes Primideal in C, so ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ ein homogenes Primideal in B, da φ mit der Graduierung verträglich ist. Gilt $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$, so folgt $B_+ \not\subset \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, also erhalten wir eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} f : \operatorname{Proj} C \setminus V(\mathfrak{a}) & \to & \operatorname{Proj} B \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \varphi^{-1}(\mathfrak{p}). \end{array}$$

Diese ist offenbar stetig.
Ist $b \in B_+$ homogen und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} C \setminus V(\mathfrak{a})$, so ist $\varphi(b) \in \mathfrak{p}$ genau dann, wenn $b \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ gilt. Daraus folgt $f^{-1} D_+(b) = D_+(\varphi(b))$. Wir definieren einen Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} f^\sharp_{D_+(b)} : \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} B}(D_+(b)) = B_{(b)} & \to & C_{(\varphi(b))} = \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} C \setminus V(\mathfrak{a})}(f^{-1} D_+(b)) \quad \text{durch} \\ a/b^k & \mapsto & \varphi(a)/\varphi(b)^k. \end{array}$$

Da φ graduiert ist, wird ein Element vom Grad 0 in B_b auf ein Element vom Grad 0 in $C_{\varphi(b)}$ abgebildet, diese Abbildung ist also wohldefiniert.
Man überprüft leicht, dass die Ringhomomorphismen $f^\sharp_{D_+(b)}$ mit den Restriktionsabbildungen verträglich sind. Also können wir sie zu einem Garbenmorphismus $f^\sharp : \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} B} \to f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} C \setminus V(\mathfrak{a})}$ zusammensetzen. $\square$

Ist $\mathfrak{a} \subset B$ ein homogenes Ideal in dem graduierten Ring B, so ist auch der Quotientenring $B/\mathfrak{a}$ graduiert, indem wir

$$(B/\mathfrak{a})_d = B_d / (\mathfrak{a} \cap B_d)$$

setzen. Wir betrachten nun den Fall $B = A\,[x_0,\, ...,\, x_n]$ für einen Ring A.

Proposition 5.7 Ist $\mathfrak{a} \subset A\,[x_0,\,...,\,x_n]$ ein homogenes Ideal, so vermittelt der graduierte Homomorphismus $\varphi : A\,[x_0,\,...,\,x_n] \to A\,[a_0,\,...,\,a_n]/\mathfrak{a}$ eine abgeschlossene Immersion

$$f : \text{Proj}\,(A\,[x_0,\,...,\,x_n]/\mathfrak{a}) \to \mathbb{P}^n_A,$$

so dass das Bild der zugehörigen stetigen Abbildungen die abgeschlossene Teilmenge $V(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{P}^n_A$ ist.

Beweis : Wir setzen $B = A\,[x_0,\,...,\,x_n]$. Der Homomorphismus φ erfüllt $\varphi(B_+) = (B/\mathfrak{a})_+$, also erhalten wir einen Morphismus

$$f : \text{Proj}\,B/\mathfrak{a} \to \text{Proj}\,B = \mathbb{P}^n_A$$

mit Lemma 5.6.
Ist $\mathfrak{p} \subset B$ ein beliebiges homogenes Primideal mit $B_+ \not\subset \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, so ist $\varphi(\mathfrak{p})$ ein homogenes Primideal in $B/\mathfrak{a}$ mit $(B/\mathfrak{a})_+ \not\subset \varphi(\mathfrak{p})$. Dies definiert eine Umkehrabbildung $V(\mathfrak{a}) \to \text{Proj}\,B/\mathfrak{a}$. Man prüft leicht nach, dass $f(V(\mathfrak{b})) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$ für jedes homogene Ideal $b \subset B/\mathfrak{a}$ gilt. Daher ist f ein Homöomorphismus auf die Teilmenge $V(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{P}^n_A$. Der Garbenmorphismus

$$f^\sharp : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A} \to f_*\mathcal{O}_{\text{Proj}\,B/\mathfrak{a}},$$

ausgewertet auf $D_+(b) \subset \mathbb{P}^n_A$ liefert nach Lemma 5.6 einen surjektiven Ringhomomorphismus. Da die offenen Mengen der Form $D_+(b)$ eine Basis der Topologie bilden, ist $f^\sharp$ surjektiv. Somit ist f nach Definition 4.14 in der Tat eine abgeschlossene Immersion.

□

Definition 5.8 Es sei A ein Ring. Ein **projektives A-Schema** ist ein A-Schema $X \to \text{Spec}\,A$, so dass es eine abgeschlossene Immersion $i : X \to \mathbb{P}^n_A$ von A-Schemata gibt.

6 Faserprodukte

Wir wollen nun das richtige Produkt in der Kategorie der Schemata kennenlernen.

Definition 6.1 Es sei S ein Basisschema. Sind X und Y S-Schemata, so heißt ein S-Schema Z zusammen mit zwei S-Morphismen $p : Z \to X$ und $q : Z \to Y$ **Faserprodukt** von X und Y über S, falls gilt:

Für jedes S-Schema T zusammen mit S-Morphismen $T \to X$ und $T \to Y$ gibt es genau einen S-Morphismus $T \to Z$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
T \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z. \arrow[ul, "p"'] \arrow[dl, "q"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Falls das Faserprodukt Z von X und Y über S existiert, so ist es durch die universelle Eigenschaft bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen es mit $Z = X \times_S Y$ und nennen die Abbildungen $p : X \times_S Y \to X$ und $q : X \times_S Y \to Y$ die **Projektionen**.

Zur Erinnerung: Ein S-Schema ist ein Schema X zusammen mit einem Morphismus $f : X \to S$. Sind $(X, f : X \to S)$ und $(Y, g : Y \to S)$ zwei S-Schemata, so ist ein S-Morphismus von X nach Y ein Morphismus $h : X \to Y$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Proposition 6.2 Ist $S = \operatorname{Spec} A$ affin und sind $X = \operatorname{Spec} B$ und $Y = \operatorname{Spec} C$ affine S-Schemata, so ist $Z = \operatorname{Spec}(B \otimes_A C)$ zusammen mit den Morphismen $Z \to X$ und $Z \to Y$, die von den Ringhomomorphismen $B \to B \otimes_A C$ und $C \to B \otimes_A C$ induziert werden, das Faserprodukt von X und Y über S.

Beweis : Zu den Schemamorphismen $X \to S$ und $Y \to S$ gehören Ringhomomorphismen $A \to B$ und $A \to C$. Diese machen B und C zu A-Algebren. Wir prüfen die universelle Eigenschaft von $Z = \operatorname{Spec}(B \otimes_A C)$ nach. Es sei T ein S-Schema zusammen mit S-Morphismen $T \to X = \operatorname{Spec} B$ und $T \to Y = \operatorname{Spec} C$. Nach [KA], Proposition 7.19 ist für jedes affine Schema $\operatorname{Spec} D$ die Abbildung

$$\operatorname{Mor}(T, \operatorname{Spec} D) \to \operatorname{Hom}_{\text{Ringe}}(D, \mathcal{O}_T(T))$$

bijektiv. Also gibt es Ringhomomorphismen $A \to \mathcal{O}_T(T)$, $B \to \mathcal{O}_T(T)$ und $C \to \mathcal{O}_T(T)$, so dass die Diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & B \arrow[d] \\ & \mathcal{O}_T(T) \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & C \arrow[d] \\ & \mathcal{O}_T(T) \end{tikzcd}$$

kommutativ sind. Also sind $B \to \mathcal{O}_T(T)$ und $C \to \mathcal{O}_T(T)$ A-Algebrenhomomorphismen. Nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts existiert genau ein A-Algebrahomomorphismus

$$\varphi : B \otimes_A C \to \mathcal{O}_T(T),$$

so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ B \otimes_A C \arrow[rr] & & \mathcal{O}_T(T) \\ & C \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Also gibt es genau einen S-Schemamorphismus $T \to Z = \operatorname{Spec}(B \otimes_A C)$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Spec} B & \\ T \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & \operatorname{Spec} C & \end{tikzcd}$$

kommutiert. □

Lemma 6.3 Es seien X und Y S-Schemata, so dass das Faserprodukt $X \times_S Y$ existiert. Mit $p : X \times_S Y \to X$ bezeichnen wir die Projektion nach X. Für jedes offene Unterschema U von X ist dann das offene Unterschema $p^{-1}(U) \subset X \times_S Y$ das Faserprodukt von U und Y über S.

Beweis : Wir prüfen nach, dass $p^{-1}(U)$ zusammen mit den auf $p^{-1}(U)$ eingeschränkte Projektionen die universelle Eigenschaft des Faserproduktes $U \times_S Y$ erfüllt. Sei T ein S-Schema zusammen mit S-Morphismen $T \to U$ und $T \to Y$. Dann betrachten wir

$T \to U \hookrightarrow X$ und erhalten aufgrund der universellen Eigenschaft des Faserprodukts genau einen Morphismus

$$f : T \to X \times_S Y,$$

der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & X & \\
 & U \arrow[ur, hook] & & \\
T \arrow[ur] \arrow[rrr, "f"] \arrow[drr] & & & X \times_S Y \arrow[uul, "p"'] \arrow[dl] \\
 & & Y &
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Also liegt $p \circ f(T)$ in der offenen Teilmenge U von X. Somit ist $f(T) \subset p^{-1}(U)$. Daher gibt es genau einen S-Morphismus $f : T \to p^{-1}(U)$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & U & \\
T \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & p^{-1}(U) \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht. $\square$

Lemma 6.4 Es seien X und Y S-Schemata und $\{X_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Existieren dann alle Faserprodukte $X_i \times_S Y$, so existiert auch das Faserprodukt $X \times_S Y$. Analog gilt für eine offene Überdeckung $\{Y_i\}_{i \in I}$ von Y: Existieren alle Faserprodukte $X \times_S Y_i$, so existiert auch $X \times_S Y$.

Beweis : Es sei $p_i : X_i \times_S Y \to X_i$ die Projektion nach X_i. Wir setzen für alle $i, j \in I$

$$U_{ij} = p_i^{-1}(X_i \cap X_j) \subset X_i \times_S Y.$$

Dann ist U_{ij} nach Lemma 6.3 das Faserprodukt von $X_i \cap X_j$ mit Y über S. Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage in Definition 1.4 existiert ein eindeutig bestimmter Isomorphismus

$$\varphi_{ij} : U_{ij} \to U_{ji}.$$

Wir definieren nun ein neues Schema Z wie folgt: Der topologische Raum ist $Z = \dot{\bigcup\limits_{i \in I}} (X_i \times_S Y)/\sim$, wobei $a \sim b$ genau dann gilt, wenn es i, j mit $a \in U_{ij}, b \in U_{ji}$ und $\varphi_{ij}(a) = b$ gibt.
Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Den Raum Z aller Äquivalenzklassen statten wir mit der Quotiententopologie aus. Wir haben kanonische stetige Projektionen

$$p_i : X_i \times_S Y \to Z.$$

Mit $Z_i = p_i(X_i \times_S Y)$ bezeichnen wir das Bild in Z.Es ist offen und $p_i : X_i \times_S Y \to Z_i$ ist ein Homöomorphismus. Ferner gilt $p_i(U_{ij}) = Z_i \cap Z_j = p_j(U_{ji})$. Wir setzen

$$\mathcal{O}_{Z_i} := p_{i_*}\mathcal{O}_{X_i \times_S Y}$$

Der Isomorphismus $\varphi_{ij}^\sharp : \mathcal{O}_{U_{ji}} \simeq (\varphi_{ij})_* \mathcal{O}_{U_{ij}}$ liefert Isomorphismen

$$\alpha_{ij} : \mathcal{O}_{Z_j|_{Z_i \cap Z_j}} = p_{j*}(\mathcal{O}_{X_j \times_S Y|U_{ji}}) = p_{j*}(\mathcal{O}_{U_{ji}})$$

$$\simeq p_{j*}(\varphi_{ij*})\mathcal{O}_{U_{ij}} = p_{i*}(\mathcal{O}_{U_{ij}}) = p_{i*}(\mathcal{O}_{X_i \times_S Y|U_{ij}}) = \mathcal{O}_{Z_i|_{Z_i \cap Z_j}}.$$

Mit Hilfe dieser Isomorphismen definieren wir wie folgt eine Garbe $\mathcal{O}_Z$ auf Z. Für $U \subset Z$ sei

$$\mathcal{O}_Z(U) = \{(s_i)_{i \in I} : s_i \in \mathcal{O}_{Z_i}(U \cap Z_i) : \alpha_{ij}(s_j \mid_{U \cap Z_i \cap Z_j}) = s_i \mid_{U \cap Z_i \cap Z_j} \text{ für alle } i, j\}$$

Dann ist $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ein Schema (ÜA). Wir nennen dieses Schema „die Verklebung der $X_i \times_S Y$ entlang der Isomorphismen φ_{ij}". Wir behaupten, dass $(Z, \mathcal{O}_Z)$ die universelle Eigenschaft des Faserprodukts von X und Y über S hat.

Die Projektionen

$$p_i : X_i \times_S Y \to X_i$$

und

$$q_i : X_i \times_S Y \to Y$$

erfüllen $p_j \circ \varphi_{ij} = p_i$ und $q_j \circ \varphi_{ij} = q_i$. Also können wir sie zu Projektionen $p : Z \to X$ und $q : Z \to Y$ zusammenkleben.
Sei nun T ein S-Schema mit S-Morphismen $T \xrightarrow{a} X$ und $T \xrightarrow{b} Y$. Wir setzen $T_i = a^{-1}(X_i) \subset T$. Dann existiert für jedes $i \in I$ genau ein S-Morphismus $f_i : T_i \to X_i \times_S Y$,

der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& X_i & \\
T_i \arrow[ur, "a"] \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "b"'] & & X_i \times_S Y \arrow[ul, "p_i"'] \arrow[dl, "q"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht.
Aufgrund der Eindeutigkeit ist $\varphi_{ij} \circ f_i = f_j$ auf $T_i \cap T_j$. Also verkleben sich die f_i zu einem S-Morphismus $f : T \to Z$. Dieser ist eindeutig bestimmt, da seine Einschränkung auf alle T_i eindeutig bestimmt ist. Die analoge Aussage für Y zeigt man genauso. $\square$

Lemma 6.5 Es sei $U \subset S$ ein offenes Unterschema. Es seien $u : X \to S$ und $v : Y \to S$ zwei S-Schemata, so dass $u : X \to S$ als

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\tilde{u}"] \arrow[dr, "u"'] & & U \arrow[dl, hook'] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

faktorisiert.
Falls das Faserprodukt $X \times_U v^{-1}(U)$ existiert, so ist $X \times_U v^{-1}(U)$ auch das Faserprodukt von X und Y über S, d.h. es gilt

$$X \times_U v^{-1}(U) \simeq X \times_S Y.$$

Beweis : Es sei T ein S-Schema mit S-Morphismen $a : T \to X$ und $b : T \to Y$. Da

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[rr, "a"] \arrow[dr] & & X \arrow[dl] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

kommutiert, faktorisiert der Strukturmorphismus $T \to S$ über U. Nun kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[rr, "b"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dd, "v"] \\
& U \arrow[dr] & \\
& & S
\end{tikzcd}$$

also gilt $b(T) \subset v^{-1}(U)$. Es existiert also genau ein Morphismus

$$T \to X \times_U v^{-1}(U),$$

so dass

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
T \arrow[ur, "a"] \arrow[rr] \arrow[dr, "b"'] & & X \times_U v^{-1}(U) \arrow[ull] \arrow[dl] \\
 & v^{-1}(U) \arrow[d] & \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 6.6 Es sei S ein beliebiges Schema und X und Y seien zwei S-Schemata. Dann existiert das Faserprodukt $X \times_S Y$.

Beweis : Es seien $u : X \to S$ und $v : Y \to S$ die Strukturmorphismen. Wir wählen eine offene affine Überdeckung $(S_i)_{i \in I}$ von S und betrachten die offenen affinen Unterschemata $X_i = u^{-1}(S_i) \subset X$ und $Y_i = v^{-1}(S_i) \subset Y$. Jetzt wählen wir offene affine Überdeckungen $(U_{i_j})_{j \in J}$ und $(V_{i_k})_{k \in K}$ von X_i bzw. von Y_i. Dann existieren nach Proposition 6.2 alle Faserprodukte $U_{i_j} \times_{S_i} U_{i_k}$. Wir halten $i \in I$ und $k \in K$ fest. Dann können wir die $(U_{i_j} \times_{S_i} V_{i_k})_{j \in J}$ nach Lemma 6.4 zu dem Faserprodukt $X_i \times_{S_i} V_{i_k}$ verkleben. Wir wenden Lemma 6.4 erneut an und verkleben die $(X_i \times_{S_i} V_{i_k})_{k \in K}$ zu dem Faserprodukt $X_i \times_{S_i} Y_i$. Nach Lemma 6.5 gilt $X_i \times_{S_i} Y_i = X_i \times_S Y$. Jetzt wenden wir wieder Lemma 6.4 auf die offene Überdeckung $\{X_i\}_{i \in I}$ von X an und verkleben die $X_i \times_S Y$ zu $X \times_S Y$. □

Proposition 6.7 Es seien X, Y und Z S-Schemata für ein beliebiges Basisschema S. Dann gilt:

i) Es gibt kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned}
X \times_S S &\simeq X \\
X \times_S Y &\simeq Y \times_S X \text{ und} \\
(X \times_S Y) \times_S Z &\simeq X \times_S (Y \times_S Z)
\end{aligned}$$

ii) Es sei $a : Z \to Y$ ein Y-Schema, das wir via $Z \to Y \to S$ als S-Schema betrachten. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus von S-Schemata $(X \times_S Y) \times_Y Z \simeq X \times_S Z$, wobei wir $X \times_S Y$ über die Projektion $X \times_S Y \to Y$ als Y-Schema auffassen.

iii) Sind $f : X \to X'$ und $g : Y \to Y'$ Morphismen von S-Schemata, so existiert genau ein Morphismus
$$f \times g : X \times_S Y \to X' \times_S Y',$$
der das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & X' \\
X \times_S Y \arrow[u, "p"] \arrow[r, "f\times g"] \arrow[d, "q"'] & X' \times_S Y' \arrow[u, "p'"'] \arrow[d, "q'"] \\
Y \arrow[r, "g"'] & Y'
\end{tikzcd}$$

iv) Es seien $i : U \hookrightarrow X$ und $j : V \hookrightarrow Y$ offene Unterschemata. Dann induziert der Morphismus
$$i \times j : U \times_S V \to X \times_S Y$$
einen Isomorphismus von $U \times_S V$ auf das offene Unterschema $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$ von $X \times_S Y$.

Beweis :

i) Ist $a : T \to S$ ein beliebiges S-Schema, so gibt es nur einen S-Morphismus $T \to S$, also einen Morphismus, der

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[rr] \arrow[dr] & & S \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht, nämlich den Strukturmorphismus a selbst.
Sind somit S-Morphismen $f : T \to X$ und $g : T \to S$ vorgegeben, so ist $g = a$,

und es existiert genau ein Morphismus $T \to X$, nämlich f, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X & \\ T \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "a"'] & & X \arrow[ul, "\mathrm{id}"'] \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. X erfüllt also die universelle Eigenschaft des Faserprodukts von X mit S über S. Daher gibt es wegen der Eindeutigkeit des Faserproduktes genau einen Isomorphismus

$$X \times_S S \to X,$$

so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X & \\ X \times_S S \arrow[ur, "p"] \arrow[rr] \arrow[dr, "q"'] & & X \arrow[ul, "\mathrm{id}"'] \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Diesen nennt man **kanonisch**.
Analog zeigt man die anderen beiden Isomorphismen.

ii) Wir zeigen, dass das S-Schema $(X \times_S Y) \times_Y Z$ zusammen mit den Projektionen $(X \times_S Y) \times_Y Z \overset{\text{proj}}{\longrightarrow} X \times_S Y \overset{\text{proj}}{\longrightarrow} X$ und $(X \times_S Y) \times_Y Z \overset{\text{proj}}{\longrightarrow} Z$ die universelle Eigenschaft des Faserproduktes $X \times_S Z$ erfüllt. Sei T ein S-Schema mit S-Morphismen $T \to X$ und $T \to Z$. Dann definieren wir einen S-Morphismus $T \to Y$ als Komposition

$$T \to Z \overset{a}{\to} Y.$$

Nach der universellen Eigenschaft von $X \times_S Y$ gibt es einen eindeutig bestimmten S-Morphismus $T \to X \times_S Y$, der das folgende Diagramm kommutativ macht

$$
\begin{tikzcd}
 & & X & & \\
T \arrow[urr] \arrow[rrrr] \arrow[dr] & & & & X \times_S Y \arrow[ull] \arrow[dll] \\
 & Z \arrow[dr] & & & \\
 & & Y & &
\end{tikzcd}
$$

Betrachten wir $X \times_S Y$ über die Projektion als Y-Schema, so ist $T \to X \times_S Y$ ein Morphismus von Y-Schemata. Nach Konstruktion ist auch $T \to Z$ ein Morphismus von Y-Schemata. Also gibt es genau einen Y-Morphismus $T \to (X \times_S Y) \times_Y Z$, der das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$
\begin{tikzcd}
 & X \times_S Y & \\
T \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & (X \times_S Y) \times_Y Z \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & Z &
\end{tikzcd}
$$

Dann kommutiert auch das Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
 & X & & \\
 & & X \times_S Y \arrow[ul] & \\
T \arrow[uur] \arrow[rrr] \arrow[dr] & & & (X \times_S Y) \times_Y Z \arrow[ul] \arrow[dll] \\
 & Z & &
\end{tikzcd}
$$

Also erfüllt $(X \times_S Y) \times_Y Z$ in der Tat die universelle Eigenschaft von $X \times_S Z$. Daher gibt es einen eindeutig bestimmten (kanonischen) Isomorphismus

$$(X \times_S Y) \times_Y Z \xrightarrow{\sim} X \times_S Z,$$

der mit den Projektionen verträglich ist.

iii) Wir haben Morphismen

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[drr] & X' \arrow[dr] & \\
X \times_S Y \arrow[u, "p"] \arrow[d, "q"'] & & S \\
Y \arrow[r, "g"'] \arrow[urr] & Y' \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

also mit der universellen Eigenschaft des Faserproduktes die gewünschte Abbildung.

iv) Man zeigt, dass $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$ die universelle Eigenschaft des Faserproduktes $U \times_S V$ erfüllt.

□

Definition 6.8 Es sei S ein Basisschema und $a : X \to S$ ein Morphismus, der X zu einem S-Schema macht. Für jedes S-Schema S' nennen wir das Faserprodukt $X \times_S S'$ zusammen mit der Projektion

$$a' : X \times_S S' \to S'$$

den **Basiswechsel** von a vermöge $S' \to S$. Ist $f : X \to Y$ ein Morphismus von S-Schemata, so heißt der S-Morphismus

$$f_{S'} = f \times_{\mathrm{id}_{S'}} : X \times_S S' \to Y \times_S S'$$

der **Basiswechsel von** f.

Beispiel: Sei A ein Ring und $X = \operatorname{Spec} A[x_1, ..., x_n]/(P_1, ..., P_m)$ für Polynome $P_1, ..., P_m \in A[x_1, ..., x_n]$. Es sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ der zugehörige Schemamorphismus. Dann ist

$$X \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} B = \operatorname{Spec} B[x_1, ..., x_n]/(\varphi(P_1), ..., \varphi(P_m))$$

der Basiswechsel des A-Schemas X mit $\operatorname{Spec} B$. Hier ist $\varphi(P_i)$ das Bild von P_i unter der Fortsetzung von φ zu einem Ringhomomorphismus $A[x_1, ..., x_n] \to B[x_1, ..., x_n]$.

Definition 6.9 Es sei $f : X \to Y$ ein beliebiger Morphismus von Schemata. Für jedes $y \in Y$ betrachten wir den Restklassenkörper $\kappa(y)$. Es existiert ein natürlicher Morphismus

$$\operatorname{Spec} \kappa(y) \to Y,$$

der den einzigen Punkt in Spec $\kappa(y)$ auf y abbildet. Der Basiswechsel von f mit dem Y-Schema $\kappa(y)$

$$f_y : X_y = X \times_Y \operatorname{Spec} \kappa(y) \to \operatorname{Spec} \kappa(y)$$

heißt **Faser** von f im Punkt y.

Beispiel: Sei $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ und $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x, y]/(xy - m)$ mit dem natürlichen Morphismus $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Dann ist die Faser von X über $(0) \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ das $\mathbb{Q}$-Schema

$$X_{\mathbb{Q}} = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[x, y]/(xy - m) \simeq \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[x, 1/x].$$

Für jede Primzahl p ist die Faser von X über $(p) \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ das $\mathbb{F}_p$-Schema $X_{\mathbb{F}_p} = \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[x, y]/(xy - m)$. Es ist $X_{\mathbb{F}_p} \simeq \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[x, 1/x]$, falls $p \nmid m$, und $X_{\mathbb{F}_p} \simeq \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[x, y]/(xy)$, falls $p|m$. Im zweiten Fall zerfällt $X_{\mathbb{F}_p}$ in zwei irreduzible Komponenten.

Bemerkung 6.10 Es sei $f : X \to Y$ ein Schemamorphismus. Für jedes $y \in Y$ induziert dann die erste Projektion

$$p : X_y = X \times_Y \operatorname{Spec} \kappa(y) \to X$$

einen Homöomorphismus des Schemas X_y auf die Faser $f^{-1}(y) \subset X$, ausgestattet mit der Relativtopologie.

Beweis : Wir können nach Übergang zu einer offenen affinen Umgebung $U \simeq \operatorname{Spec} A$ um y annehmen, dass Y affin ist. Sei $\mathfrak{p}$ das Primideal in A zu y.
Ferner sei $V \subset X$ eine offene affine Teilmenge. Nach Lemma 6.3 ist $p^{-1}(V) \simeq V \times_Y \operatorname{Spec} \kappa(y)$. Also genügt es, die Behauptung für alle offenen affinen Teilmengen von X zu zeigen. Wir können daher $X \simeq \operatorname{Spec} B$ affin annehmen. Sei $\varphi : A \to B$ der Ringhomomorphismus zu $f : X \to Y$. Nach Proposition 6.2 ist $X_y \simeq \operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(y))$ und $p : X_y \to X$ gehört zu dem natürlichen Ringhomomorphismus $B \to B \otimes_A \kappa(y) = B \otimes_A A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Wir zerlegen diesen Homomorphismus in zwei Teile:

$$B \xrightarrow{f} B \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{g} B \otimes_A (A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}).$$

Es sei $S = \varphi(A \setminus \mathfrak{p})$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}B & \to & B \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \\ b/\varphi(a) & \mapsto & b \otimes 1/a \end{array}$$

ein Isomorphismus. (Das Tensorprodukt vertauscht nämlich mit Lokalisierungen, siehe Übungen.)
Also vermittelt f eine Bijektion von $\operatorname{Spec}(B \otimes_A A_\mathfrak{p})$ auf die Menge der Primideale in B, die disjunkt zu $\varphi(A \setminus \mathfrak{p})$ sind.
Ferner prüft man nach, dass g einen Isomorphismus $S^{-1}B/\varphi(\mathfrak{p})S^{-1}B \xrightarrow{\sim} B \otimes_A (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})$ induziert, denn die linke Seite besitzt die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes rechts. Also vermittelt g eine Bijektion von $\operatorname{Spec}(B \otimes_A (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}))$ auf die Menge der Primideale in $S^{-1}B$, die über $\varphi(\mathfrak{p})S^{-1}B$ liegen.
Daher induziert die Komposition $g \circ f$ eine Bijektion von $\operatorname{Spec}(B \otimes_A (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}))$ auf die Menge aller Primideale in B, die über $\varphi(\mathfrak{p})B$ liegen und disjunkt zu $\varphi(A \setminus \mathfrak{p})$ sind. Das sind genau die Primideale $\mathfrak{q} \subset B$ mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. Daraus folgt die Behauptung. □

Definition 6.11 Es sei P eine Eigenschaft eines Morphismus von Schemata. Wir sagen, P ist **stabil unter Basiswechsel**, falls gilt:
Erfüllt $f : X \to Y$ die Eigenschaft P, so erfüllt für jeden Morphismus $Y' \to Y$ auch der Basiswechsel

$$f_{Y'} : X \times_Y Y' \to Y'$$

die Eigenschaft P.

Proposition 6.12 Offene Immersionen sind stabil unter Basiswechsel.

Beweis : Sei $i : X \to Y$ eine offene Immersion, also ein Isomorphismus auf eine offene Teilmenge $V \subset Y$. Wir betrachten für $Y' \to Y$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Y' \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "i"] & Y \end{tikzcd}$$

Aus $X \simeq V$ folgt $X \times_Y Y' \overset{6.5}{\simeq} X \times_V g^{-1}(V) \overset{X \simeq V}{\simeq} g^{-1}(V) \subset Y'$, also folgt die Behauptung. □

Proposition 6.13 Sei P eine Eigenschaft von Schemamorphismen, die stabil unter Basiswechsel ist. Sind X und Y S-Schemata und $f : X \to Y$ ein S-Morphismus, der P erfüllt, so erfüllt für jedes S-Schema Z auch

$$f \times \mathrm{id}_Z : X \times_S Z \to Y \times_S Z$$

die Eigenschaft P.

Beweis : Da P stabil unter Basiswechsel ist, erfüllt auch der Basiswechsel $X \times_Y (Y \times_S Z) \to Y \times_S Z$ von f die Eigenschaft P. Nun ist $X \times_S Z \simeq X \times_Y (Y \times_S Z)$ nach Proposition 6.7, und die Abbildung $X \times_S Z \simeq X \times_Y (Y \times_S Z) \to Y \times_S Z$ macht das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
X \times_S Z \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & Y \times_S Z \arrow[u] \arrow[d] \\
Z \arrow[r, "\mathrm{id}_Z"] & Z
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Sie stimmt also mit $f \times \mathrm{id}_Z$ überein. □

Proposition 6.14 Es sei P eine Eigenschaft von Schemamorphismen, die stabil unter Basiswechsel und Komposition ist. Erfüllen $f : X \to S$ und $g : Y \to S$ die Eigenschaft P, so erfüllt auch

$$f \times g : X \times_S Y \to S \times_S S \simeq S$$

die Eigenschaft P.

Beweis : Wir können $f \times g$ als Komposition

$$X \times_S Y \stackrel{f \times \mathrm{id} Y}{\longrightarrow} S \times_S Y \simeq Y \stackrel{g}{\to} S$$

schreiben. Der Morphismus $X \times_S Y \stackrel{f \times \mathrm{id} Y}{\longrightarrow} S \times_S Y \simeq Y$ ist die Projektion auf Y, also der Basiswechsel von f mit $Y \to S$. □

Definition 6.15 Es sei S ein beliebiges Schema. Dann gibt es einen eindeutigen Morphismus $S \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Das Schema $\mathbb{A}^n_S = \mathbb{A}^n_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} S = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x_1, ..., x_n] \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} S$ heißt **n-dimensionaler affiner Raum über S**.
Das Schema $\mathbb{P}^n_S = \mathbb{P}^n_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} S = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[x_0, ..., x_n] \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} S$ heißt **n-dimensionaler projektiver Raum über S**.

Da $\mathbb{A}^n_{\operatorname{Spec} A} \simeq \operatorname{Spec} A[x_1, ..., x_n]$ und $\mathbb{P}^n_{\operatorname{Spec} A} \simeq \operatorname{Proj} A[x_0, ..., x_n]$ (siehe Übungen) ist, passt dies mit unseren früheren Definitionen zusammen.

Definition 6.16 Ein Morphismus $f : X \to S$ heißt **projektiv**, falls es eine abgeschlossene Immersion $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_S$ für ein $n \geqq 0$ gibt, so dass

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr] & & \mathbb{P}^n_S \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

kommutiert, d.h. so dass i ein S-Morphismus ist.

Beispiele:

i) Für jedes S ist die Projektion
$$p : \mathbb{P}^n_S \to S$$
projektiv.

ii) Jede abgeschlossene Immersion $f : X \to S$ ist projektiv, die Bedingung ist dann für $\mathbb{P}^0_S = S$ erfüllt.

iii) Für jeses homogene Ideal $\mathfrak{a} \subset A[x_0, \ldots, x_n]$ ist der Morphismus
$$\mathrm{Proj}\, A[x_0, \ldots, x_n]/\mathfrak{a} \to \mathrm{Spec}\, A$$
projektiv.

7 Eigenschaften von Schemata und ihren Morphismen

Definition 7.1 Ein Schema X heißt **reduziert**, falls für alle $x \in X$ der Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ ein reduzierter Ring ist.

Lemma 7.2 i) Ein affines Schema $X \simeq \mathrm{Spec}\, A$ ist genau dann reduziert, wenn A reduziert ist.

ii) Ein Schema X ist genau dann reduziert, wenn für alle offenen Teilmengen $U \subset X$ der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ reduziert ist.

Beweis : Ein Ring A ist genau dann reduziert, wenn das Nilradikal
$$\mathrm{Nil}\, A = \sqrt{0} = \{f \in A : f^n = 0 \text{ für ein } n \geqq 0\}$$
gleich Null ist.

i) Für jede multiplikative Teilmenge $S \subset A$ gilt $\mathrm{Nil}\,(S^{-1}A) = S^{-1}\mathrm{Nil}\,(A)$ (Übungsaufgabe). Ist A ein reduzierter Ring, so ist somit für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,A$ auch $A_\mathfrak{p}$ reduziert. Also ist definitionsgemäß $\mathrm{Spec}\,A$ reduziert. Umgekehrt nehmen wir an, dass $X \simeq \mathrm{Spec}\,A$ reduziert ist, d.h. alle Halme $\mathcal{O}_{X,x}$ sind reduziert. Ist $s \in A \simeq \mathcal{O}_X(X)$ ein nilpotentes Element, so ist also für alle $x \in X$ der Keim $s_x = 0$. Daraus folgt $s = 0$, d.h. A ist reduziert.

ii) Dasselbe Argument wie in i) zeigt, dass in einem reduzierten Schema X alle Ringe $\mathcal{O}_X(U)$ reduziert sind. Wir nehmen umgekehrt an, alle $\mathcal{O}_X(U)$ sind reduziert. Es sei $X = \bigcup\limits_i U_i$ mit $U_i \simeq \mathrm{Spec}\,A_i$ eine offene affine Überdeckung von X. Dann ist $A_i \simeq \mathcal{O}_X(U_i)$ reduziert, also ist nach i) U_i ein reduziertes Schema. Da für alle $x \in U_i$ gilt $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{U_i,x}$, ist X ein reduziertes Schema.

□

Satz 7.3 i) Ist X ein beliebiges Schema, so gibt es ein eindeutig bestimmtes abgeschlossenes Unterschema

$$i : X^{\mathrm{red}} \to X$$

von X, das denselben unterliegenden topologischen Raum hat.
Ist $f : Y \to X$ ein Morphismus von einem reduzierten Schema Y nach X, so gibt es genau einen Morphismus

$$g : Y \to X^{\mathrm{red}},$$

so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & X \\ & X^{\mathrm{red}} \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

ii) Für jede abgeschlossene Teilmenge Z von X gibt es genau eine Strukturgarbe, die Z zu einem reduzierten abgeschlossenen Unterschema von X macht.

Beweis :

i) Wir definieren für alle $U \subset X$ offen

$$N(U) = \{s \in \mathcal{O}_X(U) : s_x \in \mathrm{Nil}\,(\mathcal{O}_{X,x}) \text{ für alle } x \in U\}.$$

$N(U)$ ist ein Ideal in $\mathcal{O}_X(U)$. Man prüft leicht nach, dass N eine Untergarbe von $\mathcal{O}_X$ ist. Die Quotientengarbe $\mathcal{O}_X/N$ ist eine Garbe von Ringen auf X. Es sei X^{red} der lokal geringte Raum $(X, \mathcal{O}_X/N)$. Ist $U \simeq \operatorname{Spec} A \subset X$ eine offene affine Teilmenge, so sei $i : \operatorname{Spec} A/\operatorname{Nil}(A) \to \operatorname{Spec} A$ die abgeschlossene Immersion zur Quotientenabbildung $A \to A/\operatorname{Nil}(A)$ (siehe Lemma 4.15). Für jedes $g \in A$ ist

$$\operatorname{Kern} i^\sharp(D(g)) = \operatorname{Nil}(A)_g = N(D(g)),$$

wie man leicht nachprüft (Übungsaufgabe). Daraus folgt $\operatorname{Kern} i^\sharp = N|_U$. Also ist $(U, \mathcal{O}_U/(N|_U)) \simeq \operatorname{Spec}(A/\operatorname{Nil}(A))$ ein affines Schema. Somit hat X^{red} eine offene Überdeckung aus reduzierten affinen Schemata, es ist also ein reduziertes Schema.

Wir definieren $i : X^{\text{red}} \to X$ durch die Identität auf dem topologischen Raum X und die kanonische Garbenabbildung

$$i^\sharp : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/N.$$

Die universelle Eigenschaft von X^{red} prüft man nun auf einer offenen affinen Überdeckung nach (Übungsaufgabe).

ii) Es sei $Z \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Wir prüfen zunächst die Eindeutigkeit einer reduzierten abgeschlossenen Unterschemastruktur $(Z, \mathcal{O}_Z)$ auf Z nach. Ist $U \simeq \operatorname{Spec} A \subset X$ offen affin, so ist $(U \cap Z, \mathcal{O}|_{U \cap Z})$ ein abgeschlossenes Unterschema von $U = \operatorname{Spec} A$. Nach Proposition 7.4 ist dieses isomorph zu $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$, und es gilt $V(\mathfrak{a}) = U \cap Z$. Da $(Z, \mathcal{O}_Z)$ reduziert ist, ist

$$\mathcal{O}_Z(U \cap Z) = A/\mathfrak{a}$$

ein reduzierter Ring. Also folgt $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Somit ist $\mathfrak{a}$ durch $V(\mathfrak{a}) = U \cap Z$ eindeutig bestimmt. Also ist auch $(Z, \mathcal{O}_Z)$ eindeutig bestimmt.

Nun zeigen wir für $Z \subset X$ abgeschlossen noch die Existenz einer reduzierten abgeschlossenen Unterschemastruktur. Es sei $\bigcup_i U_i = X$ eine offene affine Überdeckung. Für alle i ist $Z \cap U_i$ eine abgeschlosssene Teilmenge von $U_i \simeq \operatorname{Spec} A_i$, also von der Form $Z \cap U_i \simeq V(\mathfrak{a}_i)$ für ein Ideal $\mathfrak{a}_i \subset A_i$. Das reduzierte affine Schema $\operatorname{Spec} A/\sqrt{\mathfrak{a}_i}$ hat als unterliegenden topologischen Raum gerade $V(\sqrt{\mathfrak{a}_i}) = V(\mathfrak{a}_i) \simeq Z \cap U_i$. Also liefert $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A/\sqrt{\mathfrak{a}_i}}$ eine Garbe $\mathcal{O}_{Z \cap U_i}$ auf $Z \cap U_i$, die $Z \cap U_i$ zu einem reduzierten abgeschlossenen Unterschema von U_i macht. Aufgrund der gerade gezeigten Eindeutigkeit gilt $\mathcal{O}_{Z \cap U_i}|_{Z \cap U_i \cap U_j} = \mathcal{O}_{Z \cap U_j}|_{Z \cap U_i \cap U_j}$.

Also können wir die Garbe $\mathcal{O}_{Z\cap U_i}$ zu einer Garbe $\mathcal{O}_Z$ verkleben, die Z zu einem reduzierten abgeschlossenen Unterschema von X macht.

$\square$

Nun müssen wir noch das folgende Resultat nachtragen:

Proposition 7.4 Es sei $X = \operatorname{Spec} A$ ein affines Schema und $i : Z \hookrightarrow X$ ein abgeschlossenes Unterschema. Dann gibt es ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ und einen Isomorphismus $Z \simeq \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "i"'] & & \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \arrow[dl, "\tilde{i}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Hier ist $\tilde{i}$ die natürliche Abbildung aus Lemma 4.15. Insbesondere ist jedes abgeschlossene Unterschema eines affinen Schemas selbst affin.

Beweis : Definitionsgemäß ist i ein Homöomorphismus

$$i : Z \to i(Z),$$

und $\mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Z$ ist surjektiv.
Die Idealgarbe J sei der Kern dieser Garbenabbildung. Außerdem sei $\mathfrak{a} = J(X) = \operatorname{Kern}\big(\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_Z(Z)\big)$ und $\tilde{i} : \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \to X = \operatorname{Spec} A$ die zugehörige abgeschlossene Immersion (Lemma 4.15). Nun kann man zeigen, dass für alle $g \in \operatorname{Spec} A$ das Ideal $\mathfrak{a}A_g \subset A_g$ gerade $J\big(D(g)\big)$ ist. (Das ist technisch etwas aufwändig.)
Daraus folgt für alle $x \in \operatorname{Spec} A : \mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_{X,x} = J_x$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} i(Z) &= \{x \in X : (i_*\mathcal{O}_Z)_x \neq 0\} \\ &= \{x \in X : J_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\} \\ &= \{x \in X : \mathfrak{a}\mathcal{O}_{X,x} \neq \mathcal{O}_{X,x}\} \\ &= \{x \in X : (\tilde{i}_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}})_x \neq 0\} \\ &= \tilde{i}(\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}) \end{aligned}$$

Also ist $\tilde{i}^{-1} \circ i : Z \to \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$ ein Homöomorphismus.
Mit Hilfe der Verträglichkeit von J und $\mathfrak{a}$ kann man nachprüfen, dass dies auch einen Isomorphismus auf den Strukturgarben vermittelt. $\square$

Korollar 7.5 Abgeschlossene Immersionen sind stabil unter Basiswechsel.

Beweis : Sei $i : X \to Y$ eine beliebige abgeschlossene Immersion und $f : Y' \to Y$ ein Morphismus. Sei Spec$A \simeq U \subset Y$ eine offene affine Teilmenge und setze $V = i^{-1}(U)$. Dann ist auch

$$i\big|_V : V \to U$$

eine abgeschlossene Immersion (Übungsaufgabe). Nach Proposition 7.4 ist also $V \simeq$ Spec$A/\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$.
Nun sei Spec$B \simeq U' \subset Y'$ eine offene affine Teilmenge mit $f(U') \subset U$. Wir betrachten den Basiswechsel

$$\begin{tikzcd} i_{Y'} : X \times_Y Y' \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "i"] & Y \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rcll} \text{Nun ist } i_{Y'}^{-1}(U') & \simeq & X \times_Y U' & (6.3) \\ & \simeq & i^{-1}(U) \times_U U' & (6.5) \\ & \simeq & \text{Spec}(A/\mathfrak{a} \otimes_A B) & (6.2) \\ & \simeq & \text{Spec}(B/\mathfrak{a}B), & \text{(Übungsaufgabe)}, \end{array}$$

wobei $\mathfrak{a}B$ das via $A \to B$ erzeugte Ideal von B ist.
Ferner ist $i_{Y'}\big|_{i_{Y'}^{-1}(U')} : i_{Y'}^{-1}(U') \to U'$ gerade der Morphismus zur Quotientenabbildung $B \to B/\mathfrak{a}B$ (ÜA), also ist $i_{Y'}\big|_{i_{Y'}^{-1}(U')}$ eine abgeschlossene Immersion. Indem wir Y' durch solche offenen affinen Teilmengen U' überdecken, folgt die Behauptung. $\square$

Definition 7.6 Ein Schema X heißt **integer**, wenn für alle offenen Teilmengen $U \subset X$ der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ nullteilerfrei ist.

Lemma 7.7 Ein affines Schema $X \simeq$ Spec A ist genau dann integer, wenn A ein Integritätsring ist.

Beweis : Ist $X \simeq$ Spec A integer, so ist $A \simeq \mathcal{O}_X(X)$ nullteilerfrei, d.h. ein Integritätsring. Ist umgekehrt A ein Integritätsring, so sei $U \neq \emptyset$ eine beliebige offene Teilmenge von $X =$ Spec A. Ferner seien $s, t \in \mathcal{O}_X(U)$ gegeben mit

$$st = 0$$

in $\mathcal{O}(U)$. Da A ein Integritätsring ist, ist (0) ein Primideal in A. Es sei $\eta \in$ Spec A der zugehörige Punkt. Dann ist $\eta \in U$. Wir betrachten die Keime s_η und t_η in

$\mathcal{O}_{X,\eta} \simeq A_{(0)} = \mathrm{Quot}\, A$. Es ist $s_\eta t_\eta = 0$, also $s_\eta = 0$ oder $t_\eta = 0$. Nach Lemma 4.4 ist $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,\eta}$ injektiv, woraus $s = 0$ oder $t = 0$ folgt. Daher ist $\mathcal{O}_X(U)$ nullteilerfrei. $\square$

Vorsicht: Ist X ein integres Schema, dann sind alle $\mathcal{O}_{X,x}$ Integritätsringe. Die Umkehrung gilt aber nicht. (Übungsaufgabe)

Proposition 7.8 Ein Schema X ist genau dann integer, wenn X reduziert und irreduzibel ist.

Beweis : Falls X integer ist, so sind alle $\mathcal{O}_X(U)$ Integritätsringe, also insbesondere reduziert. Daher ist X reduziert.
Angenommen $X = X_1 \cup X_2$ für abgeschlossene Teilmengen X_1 und X_2 von X. Dann sind die offenen Teilmengen $U_1 = X \setminus X_1$ und $U_2 = X \setminus X_2$ disjunkt. Also ist nach den Garbenaxiomen die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(U_1 \cup U_2) &\to \mathcal{O}_X(U_1) \times \mathcal{O}_X(U_2) \\ f &\mapsto (f|_{U_1}, f|_{U_2}) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus. Da $\mathcal{O}_X(U_1 \cup U_2)$ keine Nullteiler besitzt, folgt $U_1 = \emptyset$ oder $U_2 = \emptyset$, also $X_1 = X$ oder $X_2 = X$. Daher ist X irreduzibel.
Wir nehmen nun an, X ist irreduzibel und reduziert. Es sei $U \subset X$ offen und $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ mit $fg = 0$. Wir betrachten $Y_f = \{x \in U : f_x \in \mathfrak{m}_x\}$ und $Y_g = \{x \in U : g_x \in \mathfrak{m}_x\}$. Diese Teilmengen sind abgeschlossen in U (Übungsaufgabe). Da für alle $x \in U$ gilt $f_x g_x = 0 \in \mathfrak{m}_x$, folgt $U = Y_f \cup Y_g$. Da X irreduzibel ist, ist nach Lemma 1.9 auch U irreduzibel. Also ist $U = Y_f$ oder $U = Y_g$. Wir können ohne Einschränkung $U = Y_f$ annehmen. Es sei $V \subset U$ eine beliebige offene affine Teilmenge. Aus $D(f|_V) = V \cap (U \setminus Y_f) = \emptyset$ folgt, dass $f|_V$ nilpotent ist. Nun ist $\mathcal{O}_X(V)$ reduziert, also ist $f|V = 0$. Also ist die Einschränkung von f auf alle offenen affinen Teilmengen von U trivial. Daraus folgt $f = 0$. $\square$

Lemma 7.9 Sei X ein irreduzibles Schema. Dann gibt es einen Punkt $\eta \in X$, der in jeder nicht-leeren offenen Teilmenge $U \subset X$ enthalten ist. Es gilt $X = \overline{\{\eta\}}$, wobei $\overline{\{\eta\}}$ der Abschluss der Einpunktmenge $\{\eta\}$ ist. Der Punkt η heißt **generischer Punkt von** X.

Beweis : Sei $\emptyset \neq U = \operatorname{Spec} A \subset X$ eine offene affine Teilmenge. Dann ist U nach Lemma 1.9 irreduzibel. Nach Proposition 1.10 gilt also $\operatorname{Spec} A = V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$ von A. Sei η der zugehörige Punkt in X. Es ist $X = \overline{\{\eta\}} \cup (X/U)$, also folgt $\overline{\{\eta\}} = X$ aus der Irreduzibilität von X. Aus $\overline{\{\eta\}} = \overline{\{\xi\}} = X$ folgt $\eta = \xi$ (Übungsaufgabe), also ist η unabhänging von der Wahl von U. Da jede nicht-leere offene Teilmenge von X eine offene affine Teilmenge von X enthält, folgt die Behauptung. □

Definition 7.10 i) Ein Schema X heißt **noethersch**, falls X eine endliche offene affine Überdeckung $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ besitzt, so dass $\mathcal{O}_X(U_i)$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$ ein noetherscher Ring ist.

ii) Ein Schema X heißt **lokal noethersch**, wenn jeder Punkt eine offene affine Umgebung U besitzt, so dass $\mathcal{O}_X(U)$ noethersch ist.

Beispiel:

i) Ist A ein noetherscher Ring, so ist $\operatorname{Spec} A$ ein noethersches Schema.

ii) Für jeden noetherschen Ring A ist der projektive Raum $\mathbb{P}_A^n$ ein noethersches Schema.

Wir haben hier die Eigenschaft noethersch jeweils nur für eine spezielle offene affine Überdeckung gefordert. Mit dieser Definition ist nicht a priori klar, dass für ein noethersches affines Schema $\operatorname{Spec} A$ der Ring A noethersch sein muss. Dies folgt aber aus dem nächsten Lemma.

Lemma 7.11 Ein Schema X ist genau dann lokal noethersch, wenn für jede offene affine Teilmenge $U \subset X$ der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ noethersch ist.

Beweis : Sei $U \simeq \operatorname{Spec} A$ eine offene affine Teilmenge von X. Da X eine Überdeckung durch Spektren noetherscher Ringe besitzt und Lokalisierungen noetherscher Ringe noethersch sind, besitzt X eine Basis der Topologie bestehend aus Spektren noetherscher Ringe. Somit ist $U = \bigcup_i U_i$ mit $U_i \simeq \operatorname{Spec} B_i$ für geeignete noethersche Ringe B_i. Wir wählen $f_i \in A \simeq \mathcal{O}_X(U)$ mit $D(f_i) \subset U_i$. Wir betrachten die Restriktionsabbildungen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(U) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{O}_X(U_i) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{O}_X(D(f_i)) \arrow[d, "\wr"] \\ A \arrow[r] & B_i \arrow[r] & A_{f_i} \end{tikzcd}$$

Es sei $g_i = f_i|_{B_i}$. Da das Bild von g_i unter $\mathrm{res}_{U_i\, D(f_i)} : B_i \to A_{f_i}$ eine Einheit ist, können wir diesen Homomorphismus nach der universellen Eigenschaft der Lokalisierung zu einem Homomorphismus $(B_i)_{g_i} \to A_{f_i}$ fortsetzen. Dieser ist surjektiv, wie man sich anhand des obigen Diagramms leicht überlegt. Also ist auch A_{f_i} ein noetherscher Ring. Wir können daher annehmen, dass die Überdeckung $(U_i)_i$ von der Form $U_i = D(f_i)$ ist. Da $U \simeq \mathrm{Spec}\, A$ quasi-kompakt ist, können wir nach Übergang zu einer endlichen Teilüberdeckung sogar $U = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D(f_i)$ mit noetherschen Ringen A_{f_i} annehmen.
Es sei $\mathfrak{a} \subset A \simeq \mathcal{O}_X(U)$ ein Ideal. Dann ist für alle i das zugehörige Ideal $\mathfrak{a}A_{f_i}$ in der Lokalisierung A_{f_i} endlich erzeugt. Gilt

$$\mathfrak{a}A_{f_i} = \left(\frac{a_{i_1}}{f_i^{n_1}}, \ldots, \frac{a_{i_r}}{f_i^{n_r}}\right)$$

für $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r} \in \mathfrak{a}$ und $r = r(i)$, so betrachten wir das Ideal $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$, das von allen a_{i_j} $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, r(i))$ erzeugt wird. Da nur endlich viele Indizes im Spiel sind, ist $\mathfrak{b}$ endlich erzeugt. Ferner gilt

$$\mathfrak{b}A_{f_i} = \mathfrak{a}A_{f_i} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Sei g ein beliebiges Element von $\mathfrak{a}$. Es gibt ein $m \geqq 0$ mit $f_i^m g \in \mathfrak{b}$ für alle i. Aus $U = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D(f_i)$ folgt $(f_1, \ldots, f_n) = A$. Daher ist $1 = c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n$ für geeignete $c_1, \ldots, c_n \in A$.
Für $N \geqq nm$ kommt in jedem Summanden der ausmultiplizierten Summe $(c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n)^N$ ein f_i^m vor. Also ist $g = 1\, g = (c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n)^N g \in \mathfrak{b}$, woraus $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ folgt. Also ist $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt, und A ist noethersch. $\square$

Definition 7.12 Es sei A ein Ring und B eine A-Algebra, d.h. wir haben einen Ringhomomorphismus $A \to B$ gegeben. Dann heißt B **von endlichem Typ über A**, falls B als A-Algebra endlich erzeugt ist, d.h. falls es einen surjektiven Homomorphismus von A-Algebren

$$\psi : A[x_1, \ldots, x_n] \to B$$

gibt. Ist zusätzlich der Kern von ψ ein endlich erzeugtes Ideal in $A[x_1, \ldots, x_n]$, so heißt B **von endlicher Präsentation über A**.

Ist A noethersch, so ist nach dem Hilbertschen Basissatz auch $A[x_1, \ldots, x_n]$ noethersch. In diesem Fall sind die beiden Begriffe von endlichem Typ und von endlicher Präsentation also äquivalent.

Lemma 7.13 i) Sind $A \to B \to C$ Ringhomomorphismen und ist B als A-Algebra von endlichem Typ sowie C als B-Algebra von endlichem Typ, so ist auch C als A-Algebra von endlichem Typ.

ii) Eine analoge Aussage wie in i) gilt für „von endlicher Präsentation".

iii) Ist A ein Ring und $g \in A$, so ist die Lokalisierung A_g eine A-Algebra von endlichem Typ.

iv) Ist $A \to B$ ein surjektiver Ringhomomorphismus, so ist B eine A-Algebra von endlichem Typ.

Beweis : In den Übungen. □

Definition 7.14 i) Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata heißt **lokal von endlichem Typ**, falls es eine Überdeckung von Y durch offene affine Teilmengen $U_i \simeq \operatorname{Spec} A_i$ gibt, so dass für alle i das Urbild $f^{-1}(U_i) \subset X$ eine offene affine Überdeckung $f^{-1}(U_i) = \bigcup\limits_j \operatorname{Spec} B_{i_j}$ besitzt, für die für alle i und j der zugehörige Ringhomomorphismus $A_i \to B_{i_j}$ den Ring B_{i_j} zu einer A_i-Algebra von endlichem Typ macht.

ii) $f : X \to Y$ heißt **von endlichem Typ**, falls Y eine offene affine Überdeckung durch $U_i \simeq \operatorname{Spec} A_i$ hat, so dass für alle i das Urbild $f^{-1}(U_i) \subset X$ eine endliche offene affine Überdeckung $f^{-1}(U_i) = \bigcup\limits_{j=1}^{r} \operatorname{Spec} B_{i_j}$ besitzt, für die für alle i und j der Ringhomomorphismus $A_i \to B_{i_j}$ den Ring B_{i_j} zu einer A_i-Algebra von endlichem Typ macht.

Definition 7.15 i) ein Morphismus $f : X \to Y$ heißt **lokal von endlicher Präsentation**, wenn die Bedingung aus Definition 7.14 i) mit „von endlicher Präsentation" statt „von endlichem Typ" erfüllt ist.

Proposition 7.16 Ein Morphismus $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ ist genau dann von endlichem Typ, wenn der zugehörige Ringhomomorphismus $A \to B$ aus B eine A-Algebra von endlichem Typ macht.

Ein analoges Resultat gilt für „von endlicher Präsentation" statt für von endlichem Typ.

Beweis : Ist $A \to B$ von endlichem Typ, so ist definitionsgemäß auch $f : \text{Spec}\, B \to \text{Spec}\, A$ von endlichem Typ.
Wir nehmen umgekehrt an, der Schemamorphismus $f : \text{Spec}\, B \to \text{Spec}\, A$ ist von endlichem Typ. Nach Voraussetzung existiert eine offene affine Überdeckung $\text{Spec} A = \bigcup_i U_i$ mit $U_i \simeq \text{Spec} A_i$, so dass $f^{-1}(U_i) = \bigcup_j V_{ij}$ mit $V_{ij} \simeq \text{Spec} B_{ij}$ für A_i-Algebren B_{ij} von endlichem Typ gilt. Jedes U_i ist affin, also quasi-kompakt. Daher lässt es sich durch endlich viele offene Standardmengen $D(h_{i_k})$ für $h_{i_k} \in A$ überdecken. Die Inklusion $\alpha : U_i \hookrightarrow U$ entspricht einem Ringhomomorphismus $\varphi = \text{res}_{U\, U_i} : A \to A_i$. Es gilt $D(h_{i_k}) = \alpha^{-1}(D(h_{i_k})) = D(\varphi(h_{i_k}))$, woraus $A_{h_{i_k}} \simeq (A_i)_{\varphi(h_{i_k})}$ folgt.
Ferner gilt $f^{-1}(D(h_{i_k})) \cap V_{ij} = f^{-1}D(\varphi(h_{i_k})) \cap V_{ij} = (f|_{V_{ij}})^{-1}(D(\varphi(h_{i_k}))) = D(\psi \circ \varphi(h_{i_k})) \simeq \text{Spec}\,(B_{ij})_{\psi\circ\varphi(h_{i_k})}$. Nun ist $(B_{ij})_{\psi\circ\varphi(h_{i_k})}$ von endlichem Typ über $(A_i)_{\varphi(h_{i_k})} \simeq A_{h_{i_k}}$, also nach Lemma 7.13 auch von endlichem Typ über A.
Es gilt $\text{Spec}\, B_g \simeq D(g) = i^{-1}(D(g)) = D(\varphi(g)) \simeq \text{Spec}\,(B_j)_{\varphi(g)}$, also $B_g \simeq (B_j)_{\varphi(g)}$. Daher ist B_g nach Lemma 2.13 eine B_j-Algebra von endlichem Typ, also auch eine A-Algebra von endlichem Typ. Wir können somit nach Verfeinern der Überdeckung annehmen, dass alle V_j offene Standardmengen der Form $V_j = D(g_j)$ für $g_j \in B$ sind. Da $\text{Spec}\, B$ quasi-kompakt ist, reichen endlich viele V_j aus, um $\text{Spec}\, B$ zu überdecken.
Für alle j aus der endlichen Indexmenge J wählen wir Erzeuger $b_1^{(j)}/g_j^{n_1(j)}$, ..., $b_r^{(j)}/g_j^{n_r(j)}$ der A-Algebra B_{g_j} aus (mit $r = r(j)$).
Für $b \in B$ und ein j betrachten wir nun $b/1 \in B_{g_j}$. Nach Voraussetzung lässt sich dieses Element als Polynom in $b_1^{(j)}/g_j^{n_1(j)}$, ..., $b_r^{(j)}/g_j^{n_r(j)}$ mit Koeffizienten in A schreiben. Daher gibt es nach Multiplikation mit einem geeignetem g_j^n ein Polynom in $b_1^{(j)}$, ..., $b_r^{(j)}, g_j$ mit Koeffizienten in A, das gleich $g_j^n b$ ist. Da nur endlich viele j auftauchen, können wir n unabhängig von j wählen. Nun ist $D(g_j) = D(g_j^n)$. Aus $\text{Spec}\, B = \bigcup_{j\in J} D(g_j^n)$ folgt $\sum_{j\in J}(g_j^n) = B$. Also existieren Elemente $h_j \in B$ mit $\sum_{j\in J} h_j g_j^n = 1$.
Somit ist $b = \sum_{j\in J} h_j g_j^n b$ ein Polynom in allen $b_i^{(j)}$, g_j und h_j mit Koeffizienten in A. Da dies insgesamt endlich viele Elemente sind, ist B als A-Algebra endlich erzeugt. □

Korollar 7.17 Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata ist genau dann lokal von endlichem Typ, wenn für jede offene affine Teilmenge $U \simeq \text{Spec} A \subset Y$ und jede offene affine Teilmenge $V \simeq \text{Spec} B \subset f^{-1}(U)$ der Ringhomomorphismus $A \to B$ zu $f|_V : V \to U$ den Ring B zu einer $A-$Algebra von endlichem Typ macht.

Beweis : Das folgt aus Proposition 7.16. □

Lemma 7.18 i) Offene Immersionen sind lokal von endlichem Typ.

ii) Abgeschlossene Immersionen sind von endlichem Typ.

iii) Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Morphismen lokal von endlichem Typ bzw. von endlichem Typ, so ist auch die Komposition $g \circ f : X \to Z$ lokal von endlichem Typ bzw. von endlichem Typ.

Beweis : In den Übungen. □

Definition 7.19 Es sei k ein Körper. Ein k-Schema X heißt **algebraisch**, falls der Strukturmorphismus $X \to \operatorname{Spec} k$ von endlichem Typ ist.

Beispiel:

i) Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset k[x_1, ..., x_n]$ ist $X = \operatorname{Spec} k[x_1, ..., x_n]/\mathfrak{a}$ ein (affines) algebraisches k-Schema.

ii) Für jedes homogene Ideal $\mathfrak{b} \subset k[x_0, ..., x_n]$ ist $\operatorname{Proj}(k[x_0, ..., x_n]/\mathfrak{b})$ als abgeschlossenes Unterschema des $\mathbb{P}^n_k$ ein algebraisches k-Schema.

Proposition 7.20 Es sei X ein algebraisches k-Schema. Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann abgeschlossen (d.h. $\{x\}$ ist abgeschlossen), wenn der Restklassenkörper $\kappa(x)$ eine endliche Körpererweiterung von k ist.

Beweis : Nach Voraussetzung hat X eine endliche offene affine Überdeckung $X = \bigcup\limits_{j=1}^{n} V_j$ mit $V_j \simeq \operatorname{Spec} B_j$, so dass die B_j als k-Algebren von endlichem Typ sind. Falls alle V_j die Behauptung erfüllen, so auch X. Wir können also annehmen, dass $X \simeq \operatorname{Spec} B$ affin ist. Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn das zugehörige Ideal in B maximal ist. Ist x abgeschlossen mit zugehörigem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_x \subset B$, so gilt

$$\kappa(x) \simeq B_{\mathfrak{m}_x}/\mathfrak{m}_x B_{\mathfrak{m}_x} = B/\mathfrak{m}_x.$$

Nach Lemma 7.13 ist mit B auch der Quotient $\kappa(x) \simeq B/\mathfrak{m}_x$ eine k-Algebra von endlichem Typ. Also ist $\kappa(x)/k$ eine endliche Körpererweiterung, vergleiche [AGG], Satz 3.12.

Ist umgekehrt $\kappa(x)/k$ eine endliche Körpererweiterung, so sei $\mathfrak{p}_x \subset B$ das Primideal zu x. Da

$$k \subset B/\mathfrak{p}_x \subset \mathrm{Quot}\,(B/\mathfrak{p}_x) = B_{\mathfrak{p}_x}/\mathfrak{p}_x B_{\mathfrak{p}_x} \simeq \kappa(x)$$

gilt, ist dann $\kappa(x)$ erst recht als $B/\mathfrak{p}_x$-Modul endlich erzeugt. Nach Lemma [AGG], 3.9 ist $B/\mathfrak{p}_x$ also ein Körper, d.h. $\mathfrak{p}_x$ ist ein maximales Ideal. □

Lemma 7.21 Die Eigenschaften von endlichem Typ, lokal von endlichem Typ, von endlicher Präsentation und lokal von endlicher Präsentation sind stabil unter Basiswechsel.

Beweis : Nach Wahl geeigneter offener affiner Überdeckungen führt man die Behauptung auf folgendes Problem zurück: Ist B eine $A-$Algebra mit einer der vier Eigenschaften aus der Behauptung und ist C eine beliebige $A-$Algebra, so hat auch $B \otimes_A C$ als $C-$Algebra die entsprechende Eigenschaft. Dies folgt aus der Tatsache, dass ein surjektiver $A-$Algebren-Homomorphismus

$$(*) \quad A[x_1, \ldots, x_n] \to B$$

nach Tensorieren mit C einen surjektiven $C-$Algebren-Homomorphismus

$$C[x_1, \ldots, x_n] \simeq A[x_1, \ldots, x_n] \otimes_A C \to B \otimes_A C$$

ergibt, dessen Kern als Ideal in $C[x_1 \ldots x_n]$ von denselben Erzeugern erzeugt wird wie der Kern von $(*)$. □

8 Separierte und eigentliche Morphismen

Wir betrachten zunächst einen topologischen Raum T. Der Raum T ist genau dann Hausdorffsch, wenn das Bild der Diagonalabbildung

$$\begin{aligned} \triangle : T &\to T \times T \\ x &\mapsto (x,\, x) \end{aligned}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $T \times T$ ist. Eine ähnliche Bedingung kann man für Schemata formulieren.

Definition 8.1 Es sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata.

i) Die **Diagonalabbildung** zu f ist definiert als der eindeutige Morphismus

$$\triangle_f : X \to X \times_Y X,$$

der folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
X \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, "\triangle_f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & & X \times_Y X \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

Die Existenz von $\triangle_f$ folgt natürlich aus der universellen Eigenschaft des Faserproduktes.

ii) Der Morphismus f heißt **separiert**, falls $\triangle_f$ eine abgeschlossene Immersion ist. In diesem Fall sagen wir auch einfach, X ist separiert über Y.

iii) Ein Schema X heißt **separiert**, falls der eindeutig bestimmte Morphismus $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ separiert ist.

Nun sind Schemata nur in trivialen Fällen Hausdorffsch als topologische Räume. Trotzdem ist separiert eine sinnvolle Eigenschaft. Ein separiertes Schema muss nämlich nicht Hausdorffsch als topologischer Raum sein. Das liegt daran, dass der topologische Raum des Schemas $X \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} X$ im allgemeinen nicht das Produkt des topologischen Raumes zu X mit sich selbst ist (siehe Übungen).

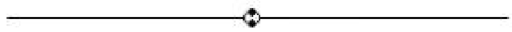
Proposition 8.2 Ist $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ ein Morphismus zwischen affinen Schemata, so ist f separiert. Insbesondere ist jedes affine Schema separiert.

Beweis : f entspricht einem Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$. Die Diagonalabbildung $\triangle_f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} B \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} B \simeq \operatorname{Spec} B \otimes_A B$ wird von dem Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} \psi : B \otimes_A B &\to B, \\ \sum_i a_i(b_i \otimes c_i) &\mapsto \sum_i \varphi(a_i) b_i c_i \end{aligned}$$

induziert. Dieser Ringhomomorphismus ψ definiert nämlich einen Schemamorphismus $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec}(B \otimes_A B)$, der das definierende Diagramm zu $\triangle_f$ kommutativ macht. Da ψ surjektiv ist, ist $\triangle_f$ eine abgeschlossene Immersion. □

Beispiel: Es sei k ein Körper und $X_1 = \mathbb{A}^1_k$ sowie $X_2 = \mathbb{A}^1_k$. Wir betrachten die offenen Teilmengen $U_1 = \mathbb{A}^1_k \setminus \{0\} \subset X_1$ und $U_2 = \mathbb{A}^1_k \setminus \{0\} \subset X_2$. Sei $\varphi = \mathrm{id} : U_1 \to U_2$. Entlang dieser Abbildung verkleben wir X_1 und X_2 zu einem Schema X. Wir erhalten eine affine Gerade $\mathbb{A}^1_k$ mit doppeltem Nullpunkt:



Das Faserprodukt $X \times_{\mathrm{Spec}\, k} X$ ist dann die affine Ebene $\mathbb{A}^2_k$ mit verdoppelten Koordinatenachsen und vierfachem Nullpunkt. Das Bild der Diagonalabbildung enthält aber nur zwei dieser Nullpunkte. Es ist also nicht abgeschlossen (Übungsaufgabe).

Lemma 8.3 i) Offene und abgeschlossene Immersionen sind separiert.

ii) Separiertheit ist stabil unter Komposition.

iii) Separiertheit ist stabil unter Basiswechsel.

Beweis :

i) Ist $i : U \hookrightarrow X$ eine offene Immersion, so ist $U \times_X U \simeq U \times_U U \underset{p_1}{\overset{\sim}{\to}} U$ nach Lemma 6.5 und Proposition 6.7. Die Diagonalabbildung $\triangle_i : U \to U \times_X U$ ist also ein Isomorphismus. Ist $i : Y \hookrightarrow X$ eine abgeschlossene Immersion, so sei $\mathrm{Spec}\, A \simeq U \subset X$ eine offene affine Teilmenge. Dann ist

$$i|_{i^{-1}(U)} : i^{-1}(U) \to U \simeq \mathrm{Spec}\, A$$

eine abgeschlossene Immersion. Nach Proposition 7.4 ist $i^{-1}(U) \simeq \mathrm{Spec}\, A/\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$. Nun ist $i^{-1}(U) \times_Y X \simeq i^{-1}(U) \times_U i^{-1}(U)$ eine offene Teilmenge von $X \times_Y X$. Ferner ist $\triangle_i|_{i^{-1}(U)}$ gerade die Diagonalabbildung $\mathrm{Spec}\, A/\mathfrak{a} \simeq i^{-1}(U) \to i^{-1}(U) \times_U i^{-1}(U) \simeq \mathrm{Spec}\,(A/\mathfrak{a} \otimes_A A/\mathfrak{a})$, und $p_1 : \mathrm{Spec}\,(A/\mathfrak{a} \otimes_A A/\mathfrak{a}) \to \mathrm{Spec}\, A/\mathfrak{a}$ ist ein Isomorphismus, denn

$$\begin{array}{rcl} A/\mathfrak{a} & \to & A/\mathfrak{a} \otimes_A A/\mathfrak{a} \\ a + \mathfrak{a} & \mapsto & (a + \mathfrak{a}) \otimes 1 \end{array}$$

ist ein Isomorphismus. Also ist $\triangle_i$ auf $i^{-1}(U) \simeq \mathrm{Spec}\, A/\mathfrak{a}$ ein Isomorphismus. Daher ist $\triangle_i$ ein Isomorphismus und insbesondere eine abgeschlossene Immersion.

ii) Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ separiert, das heißt $\triangle_f : X \to X \times_Y X$ und $\triangle_g : Y \to Y \times_Z Y$ sind abgeschlossene Immersionen.
Die Diagonalabbildung $\triangle_{g \circ f} : X \to X \times_Z X$ ist die Komposition von $\triangle_f : X \to X \times_Y X \simeq X \times_Y Y \times_Y X$ mit dem Morphismus $\mathrm{id}_X \times \triangle_g \times \mathrm{id}_X : X \times_Y Y \times_Y X \to X \times_Y (Y \times_Z Y) \times_Y X \simeq X \times_Z X$, denn diese Komposition macht das verlangte Diagramm kommutativ. (Wir benutzen hier Proposition 6.7.)
Nun sind abgeschlossene Immersionen nach Korollar 7.5 stabil unter Basiswechsel, also ist nach Proposition 6.13 auch $\mathrm{id}_X \times \triangle_g \times \mathrm{id}_X$ eine abgeschlossene Immersion. Da abgeschlossene Immersionen stabil unter Komposition sind (Übungsaufgabe), folgt die Behauptung.

iii) Es sei $f : X \to Y$ separiert und $g : Y' \to Y$ ein beliebiger Morphismus. Es sei $X' = X \times_Y Y'$. Wir wollen zeigen, dass die Projektion $f' : X' = X \times_Y Y' \to Y'$ separiert ist. Der Morphismus

$$\begin{aligned} \triangle_f \times \mathrm{id}_{Y'} : X' = X \times_Y Y' &\to X \times_Y X \times_Y Y' \\ &\simeq (X \times_Y Y') \times_{Y'} (X \times_Y Y') \\ &\simeq X' \times_{Y'} X' \end{aligned}$$

macht das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X' & \\ X' \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[rr] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & & X' \times_{Y'} X' \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & X' & \end{tikzcd}$$

kommutativ, er stimmt also mit $\triangle_{f'}$ überein. Da abgeschlossene Immersionen stabil unter Basiswechsel sind, ist nach Korollar 7.5 mit $\triangle_f$ auch $\triangle_f \times \mathrm{id}_{Y'}$ eine abgeschlossene Immersion. Also ist $\triangle_{f'}$ eine abgeschlossene Immersion, d.h. f' ist separiert.

$\square$

Definition 8.4 i) Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata heißt **abgeschlossen**, wenn das Bild jeder abgeschlossenen Teilmenge von X abgeschlossen in Y ist.

ii) $f : X \to Y$ heißt **universell abgeschlossen**, falls für jedes Y-Schema Y' der Basiswechsel $f_{Y'} : X \times_Y Y' \to Y'$ abgeschlossen ist.

Analog definiert man die Eigenschaften offen und universell offen für Morphismen von Schemata.

Definition 8.5 Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata heißt **eigentlich**, falls f von endlichem Typ, separiert und universell abgeschlossen ist.

Proposition 8.6 i) Abgeschlossene Immersionen sind eigentlich.

ii) Eigentliche Morphismen sind stabil unter Komposition und Basiswechsel.

Beweis :

i) Nach Lemma 7.18 und Lemma 8.3 sind abgeschlossene Immersionen von endlichem Typ und separiert. Da abgeschlossene Immersionen abgeschlossen sind und der Basiswechsel einer abgeschlossenen Immersion nach Korollar 7.5 wieder eine abgeschlossene Immersion ist, sind abgeschlossene Immersionen auch universell abgeschlossen.

ii) Die Eigenschaften von endlichem Typ, separiert und universell abgeschlossen sind stabil unter Komposition (Lemma 7.18, Lemma 8.3 und Übungsaufgabe). Nach Lemma 7.21 und Lemma 8.3 sind die Eigenschaften von endlichem Typ und separiert stabil unter Basiswechsel. Die Eigenschaft universell abgeschlossen ist definitiongemäß stabil unter Basiswechsel.

□

Beispiel: Sei k ein Körper. Das Schema $\mathbb{A}^1_k$ ist nicht eigentlich über $\operatorname{Spec} k$. $\mathbb{A}^1_k$ ist zwar von endlichem Typ über k und als affines Schema auch separiert über k, aber nicht universell abgeschlossen. Um das einzusehen, betrachten wir den Basiswechsel

$$p_2 : \mathbb{A}^2_k \simeq \mathbb{A}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^1_k$$

von

$$\mathbb{A}^1_k \to \operatorname{Spec} k.$$

Der zugehörige Ringhomomorphismus ist die Einbettung

$$\varphi : k[y] \to k[x, y].$$

Wir betrachten die Zariski-abgeschlossene Teilmenge $V((xy - 1))$ in $\mathbb{A}^2_k$. Dann ist für jedes $b \neq 0$ in k das Ideal $(x - b^{-1}, y - b) \in V((xy - 1))$, und es gilt $(y - b) = \varphi^{-1}((x - b^{-1}, y - b))$. Also ist das Primideal $(y - b) \subset k[y]$ im Bild

$p_2(V((xy-1)))$. Andererseits gibt es kein Primideal $\mathfrak{p} \subset k[x, y]$ mit $(xy-1) \subset \mathfrak{p}$ und $y \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, denn ein solches Primideal würde y und $xy-1$, also 1 enthalten. Daher ist das Primideal (y) nicht in $p_2(V((xy-1)))$. Nun sind die Zariski-abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{A}^1_k$ gerade die endlichen Mengen abgeschlossener Punkte sowie $\emptyset$ und $\mathbb{A}^1_k$. Daher kann für einen unendlichen Körper k die Menge $p_2(V((xy-1)))$ nicht abgeschlossen sein. Also ist $\mathbb{A}^1_k \to \operatorname{Spec} k$ für unendliche Körper nicht abgeschlossen. Ist k ein endlicher Körper, so ist $\mathbb{A}^1_k \to \operatorname{Spec} k(x)$ zumindest nicht universell abgeschlossen.

Ein fundamentales Beispiel für einen eigentlichen Morphismus ist ein projektiver Morphismus.

Proposition 8.7 Projektive Morphismen sind eigentlich.

Beweis : Sei $f : X \to S$ ein projektiver Morphismus. Dann gibt es eine abgeschlossene Immersion $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_S$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{P}^n_S \arrow[dl] \\ & S. & \end{tikzcd}$$

Nach Proposition 8.6 ist i eigentlich, und eigentliche Morphismen sind stabil unter Komposition. Also genügt es zu zeigen, dass die Projektion $\mathbb{P}^n_S \to S$ eigentlich ist. Nach Proposition 8.6 sind eigentliche Morphismen stabil unter Basiswechsel, also müssen wir nur zeigen, dass $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ eigentlich ist. Nun ist $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ von endlichem Typ und separiert über $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ (Übungsaufgabe). Also genügt es zu zeigen, dass $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ universell abgeschlossen ist. Daher müssen wir also für jedes Schema S nachweisen, dass $\pi : \mathbb{P}^n_S \to S$ abgeschlossene Teilmengen auf abgeschlossene Teilmengen abbildet. Ist $S = \bigcup_i S_i$ eine offene affine Überdeckung von S, so ist $\mathbb{P}^n_S = \bigcup_i \mathbb{P}^n_{S_i}$ eine offene Überdeckung. Wir können Abgeschlossenheit einer Menge durch Schneiden mit allen Mitgliedern einer offenen Überdeckung testen. Also können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $S = \operatorname{Spec} A$ affin ist. Dann ist $\mathbb{P}^n_S = \mathbb{P}^n_A$, jede abgeschlossene Teilmenge ist also von der Form $V(\mathfrak{a})$ für ein homogenes Ideal $\mathfrak{a} \subset A[x_0, ..., x_n]$. Wir müssen zeigen, dass die Abbildung $\pi : \mathbb{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A = S$ die Menge $V(\mathfrak{a})$ auf eine abgeschlossene Teilmenge von S abbildet. Dazu genügt es zu zeigen, dass $S \setminus \pi(V(\mathfrak{a}))$ offen ist. Für ein $s \in S$ betrachten wir die Faser von π in s, also $\mathbb{P}^n_A \times_S \operatorname{Spec} \kappa(s) \simeq \mathbb{P}^n_{\kappa(s)}$ (Übungsaufgabe).

Nun ist

$$\begin{aligned} p^{-1}(V(\mathfrak{a}) \cap \pi^{-1}(s)) &= p^{-1}(V(\mathfrak{a})) \\ &= V(\mathfrak{a}_s), \end{aligned}$$

wobei $\mathfrak{a}_s \subset \kappa(s)[x_0, ..., x_n]$ das von $\mathfrak{a} \subset A[x_0, ..., x_n]$ induzierte Ideal ist.
Nun ist s genau dann in $S \setminus \pi(V(\mathfrak{a}))$ enthalten, wenn $V(\mathfrak{a}) \cap \pi^{-1}(s)$ leer ist. Das ist äquivalent zu $V(\mathfrak{a}_s) = \emptyset = V((x_0, ..., x_n))$ also nach Satz 1.7 zu $(x_0, ..., x_n) \subset \sqrt{\mathfrak{a}_s}$. Nun ist $(x_0, ..., x_n) \subset \sqrt{\mathfrak{a}_s}$ genau dann, wenn es ein $d \geqq 0$ gilt mit $x_0^d, ..., x_n^d \in \mathfrak{a}_s$, und dies ist äquivalent zu der Tatsache, dass für einen geeigneten Grad $m \geqq 0$ jedes homomogene Polynom vom Grad m in $\kappa(s)[x_0, ..., x_n]$ in $\mathfrak{a}_s$ enthalten ist.
Wir schreiben kurz $B = A\,[x_0, ..., x_n]$. Mit B_m, $\mathfrak{a}_m$, $\kappa(s)[x_0, ..., x_n]_m$, $(\mathfrak{a}_s)_m$ bezeichnen wir jeweils den homogenen Anteil vom Grad m bezüglich der Graduierung. Offenbar ist $(B/\mathfrak{a})_m = B_m/\mathfrak{a}_m$. Es ist $(\mathfrak{a}_s)_m$ das Bild von $\mathfrak{a}_m$ unter der natürlichen Abbildung

$$B = A[x_0, ..., x_n] \to \kappa(s)[x_0, ..., x_n].$$

Nun ist $(\mathfrak{a}_s)_m = \mathfrak{a}_m \otimes_A \kappa(s)$ (Übungsaufgabe). Wir haben oben gezeigt, dass s genau dann in $S \setminus \pi(V(\mathfrak{a}))$ enthalten ist, wenn

$$\kappa(s)[x_0, ..., x_n]_m = (\mathfrak{a}_s)_m$$

gilt, also genau dann, wenn

$$B_m \otimes_A \kappa(s) = \mathfrak{a}_m \otimes_A \kappa(s)$$

gilt. Nach dem Lemma von Nakayama, angewandt auf $(B/\mathfrak{a})_m \otimes_A \mathcal{O}_{S,s}$, ist also $(B/\mathfrak{a}_m) \otimes_A \mathcal{O}_{S,s} = 0$. Dies ist die Lokalisierung von $(B/\mathfrak{a})_m$ nach allen Elementen aus A, die nicht im zu s gehörigen Primideal liegen. Da $(B/\mathfrak{a})_m$ als A-Modul endlich erzeugt ist, finden wir ein f in der Nennermenge mit $f(B/\mathfrak{a})_m = 0$. Dann ist $s \in D(f)$. Jedes Primideal $\mathfrak{p} \in D(f) \subset \operatorname{Spec} A = S$ erfüllt $(B/\mathfrak{a})_m \otimes_A A_\mathfrak{p} = 0$, also gilt auch $(B/\mathfrak{a})_m \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) = 0$. Nach den obigen Überlegungen folgt daraus $\mathfrak{p} \in S \setminus \pi(V(\mathfrak{a}))$. Also ist $S \setminus \pi(V(\mathfrak{a}))$ in der Tat offen. $\square$

Literatur

[AGG] *Algebraische Geometrie: Grundlagen*. WS 2012/13.