Skript zur Vorlesung

Algebraische Gruppen

Wintersemester 2011/2012
Frankfurt am Main

Prof. Dr. Annette Werner

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

In dieser Vorlesung studieren wir bestimmte Untergruppen der linearen Gruppe $GL_n(K)$, wobei K ein algebraisch abgeschlossener Körper ist. Die Gruppe $GL_n(K)$ der invertierbaren $(n \times n)-$Matrizen über K enthält viele interessante Untergruppen.

Es gibt in der Mathematik, aber auch ihren Anwendungsfächern, viele Situationen, in denen eine Gruppe G auf einem endlich-dimensionalen $K-$ Vektorraum V operiert. Eine solche Gruppenoperation entspricht einem Gruppenhomomorphismus

$$G \to \mathrm{End}_K(V).$$

Nach Wahl einer Basis von V können wir $\mathrm{End}_K(V)$ mit $GL_n(K)$ identifizieren, wobei $n = \dim_K(V)$ gilt. Dann erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \to GL_n(K).$$

Falls G treu auf V operiert, so ist ρ injektiv (falls man nicht weiß, was treu heißt, so kann man dies als Definition nehmen). In diesem Fall ist $\rho(G)$ eine Untergruppe von $GL_n(K)$.

Wir betrachten zunächst einige Beispiele für Untergruppen der $GL_n(K)$.

Beispiele:

1. Sei $\mathcal{S}_n$ die Gruppe der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$. Wir definieren für jede Permutation σ eine $(n \times n)-$Matrix P_σ mit Einträgen $(P_\sigma)_{ij}$ durch:

$$(P_\sigma)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \sigma(i) = j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Dann liefert

$$\begin{array}{rcl} \rho : \mathcal{S}_n & \to & GL_n(K) \\ \sigma & \mapsto & P_\sigma \end{array}$$

   einen injektiven Gruppenhomomorphismus. Daher ist $\rho(\mathcal{S}_n)$, die Gruppe der Permutationsmatrizen, eine Untergruppe von $GL_n(K)$. Wir werden später sehen, dass dies ein Beispiel für eine sogenannte Weylgruppe ist.

2. Die Menge der Diagonalmatrizen

$$T_n = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{pmatrix} : t_i \in K^\times \right\}$$

   ist eine Untergruppe von $GL_n(K)$. Sie heißt Torus in $GL_n(K)$. Solche Tori werden wir später genauer studieren. Wir schreiben auch $\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n) = \begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{pmatrix}$.

3. Die Menge der oberen Dreiecksmatrizen
$$B_n = \{(a_{ij})_{i,j} \in GL_n(K) : a_{ij} = 0 \text{ für } i > j\}$$
ist eine Untergruppe von $GL_n(K)$. Eine solche Untergruppe wird Borelgruppe genannt. Auch diese Gruppen werden wir später noch genauer studieren.

4. Die Gruppe B_n enthält als Untergruppe die Gruppe
$$\begin{array}{rcl} U_n & = & \{(a_{ij})_{ij} \in GL_n(K) : a_{ij} = 0 \\ & & \text{für } i > j \text{ und } a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 1\} \end{array}$$

Falls $D = \operatorname{diag}(t_1, \ldots, t_n) \in T_n$ und $A \in U_n$ ist, so rechnen wir leicht aus, dass $DAD^{-1} \in U_n$ gilt. Ferner können wir jede Matrix $B = (b_{ij}) \in B_n$ durch „Herausziehen der Diagonalelemente“ als Produkt
$$B = TU$$
mit $T = \operatorname{diag}(b_{11}, \ldots, b_{nn})$ und $U = (u_{ij}) \in U_n$ schreiben, wobei für $i < j$ gilt $u_{ij} = b_{ij}/b_{ii}$. Daraus folgt, dass auch für beliebiges $B \in B_n$ und $A \in U_n$
$$BAB^{-1} \in U_n$$
gilt. Mit anderen Worten: U_n ist ein Normalteiler in B_n.

Wir erinnern hier an einige Begriffe der Gruppentheorie. Ist G eine Gruppe und H eine Untergruppe, dann ist
$$\mathcal{N}_G(H) = \{g \in G : g^{-1}hg \in H \text{ für alle } h \in H\}$$
der Normalisator von H in G. Gilt $\mathcal{N}_G(H) = G$, so heißt H Normalteiler in G. In diesem Fall ist die Quotientenmenge G/H eine Gruppe.

Falls H ein Normalteiler in G und T eine weitere Untergruppe von G ist mit
$$G = TH \text{ und } T \cap H = \{e\},$$
so heißt G semidirektes Produkt von T und H. Wir schreiben
$$G = T \ltimes H.$$
In diesem Fall haben wir einen Gruppenisomorphismus
$$\begin{array}{rcl} T \times H & \to & G \\ (t, h) & \mapsto & t \cdot h, \end{array}$$
wenn wir die linke Seite mit der Gruppenoperation
$$(t_1, h_1) \cdot (t_2, h_2) = \big(t_1 t_2, (t_2^{-1} h_1 t_2) h_2\big)$$
ausstatten.

In obigem Beispiel gilt
$$B_n = T_n \ltimes U_n.$$
Wir interessieren uns außerdem für die sogenannten **klassischen Gruppen**, die wir jetzt vorstellen wollen.

Definition 1.1 *Es sei $SL_n(K)$ die Gruppe aller invertierbaren Matrizen der Determinante* 1.

Wir nennen $SL_n(K)$ auch „spezielle lineare Gruppe“. Dann ist $T_n \cap SL_n(K)$ die Gruppe der Diagonalmatrizen mit Determinante 1 und $B_n \cap SL_n(K)$ die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit Determinante 1.

Es gilt $Z\big(SL_n(K)\big) = \{\mathrm{diag}(a, \dots, a) : a^n = 1\}$.

Das Zentrum der Gruppe $SL_n(K)$ ist also isomorph zur Gruppe der $n-$ten Einheitswurzeln und insbesondere eine endliche Gruppe.

Hier schreiben wir wie üblich für jede Gruppe G

$$Z(G) = \{g \in G : gh = hg \text{ für alle } h \in G\}.$$

Definition 1.2 *Es sei $q : K^n \times K^n \to K$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf K. Dann ist die zugehörige orthogonale Gruppe $O(q)$ definiert als*

$$O(q) = \{A \in GL_n(K) : \ q(Ax, Ay) = q(x, y) \text{ für alle } x, y \in K^n\}.$$

Falls $q(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ das kanonische Skalarprodukt ist, so gilt

$$O(q) = \{A \in GL_n(K) : AA^t = E_n\}.$$

Wir definieren die spezielle orthogonale Gruppe $SO(q)$ als

$$SO(q) = O(q) \cap SL_n(K).$$

Analog können wir die Untergruppen $T_n \cap O(q)$ und $B_n \cap O(q)$ von $O(q)$ betrachten.

Definition 1.3 *Es sei $2n$ eine gerade Zahl und sei K^{2n} der $K-$Vektorraum mit kanonischer Basis $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots f_n)$. Wir betrachten die nicht-ausgeartete, alternierende Bilinearform (symplektische Form)*

$$\varphi : K^{2n} \times K^{2n} \to K,$$

definiert durch

$$\begin{aligned} \varphi(e_i, e_j) &= 0 \\ \varphi(f_i, f_j) &= 0 \\ \varphi(e_i, f_j) &= \delta_{ij} \text{ und } \varphi(f_i, e_j) = -\delta_{ij} \text{ für alle } i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Dann ist die symplektische Gruppe definiert als

$$Sp_{2n}(K) = \{A \in GL_{2n}(K) : \varphi(Ax, Ay) = \varphi(x, y) \text{ für alle } x, y \in K^{2n}\}$$

Man kann zeigen, dass $Sp_{2n}(K) \subset Sl_{2n}(K)$ gilt. Auch hier liefern $T_{2n} \cap Sp_{2n}(K)$ und $B_{2n} \subset Sp_{2n}(K)$ wieder interessante Untergruppen.

Nachdem wir einige Beispiele linearer algebraischer Gruppen gesehen haben, wollen wir definieren, was eine lineare algebraische Gruppe ist.

Wir setzen $\Omega = K[x_{11}, \dots, x_{nn}]$. Dies ist ein Polynomring in n^2 Variablen. Wir können jede Matrix $A = (a_{ij})_{i,j}$ in ein Polynom $f \in \Omega$ einsetzen, indem wir x_{ij} durch a_{ij} ersetzen.

Definition 1.4 *Eine Untergruppe $G \subset GL_n(K)$ heißt lineare algebraische Gruppe, falls es endlich viele Polynome $f_1, \dots, f_r \in \Omega$ gibt mit*

$$G = \{A \in GL_n(K) : f_1(A) = \dots f_r(A) = 0\}$$

Beispiele für lineare algebraische Gruppen:

1. $SL_n(K) = \{A \in GL_n(K) : \det(A) - 1 = 0$
2. $B_n = \{A \in GL_n(K) : x_{ij}(A) = 0$ für alle $i > j\}$
3. $U_n = \{A \in GL_n(K) : x_{ij}(A) = 0$ für alle $i > j$ und $x_{11}(A) - 1 = 0, \dots, x_{nn}(A) - 1 = 0\}$
4. $T_n = \{A \in GL_n(K) : x_{ij}(A) = 0$ für alle $i \neq j\}$
5. $Z\big(GL_n(K)\big) = \{A \in GL_n(K) : x_{ij}(A) = 0$ für alle $i \neq j, x_{11}(A) - x_{22}(A) = 0, x_{22}(A) - x_{33}(A) = 0, \dots, x_{n-1,n-1}(A) - x_{nn}(A) = 0\}$.
6. Sei q eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform. Wir setzen $q_{ij} = q(e_i, e_j)$.
   $O(q) = \big\{A \in GL_n(K) : q(Ae_i, Ae_j) = q(e_i, e_j)$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}\big\}$
   $= \big\{A \in GL_n(K) : \sum_{r,s} x_{ri}(A) x_{sj}(A) q_{rs} - q_{ij} = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}\big\}$
7. $Sp_{2n}(K) = \{A \in GL_{2n}(K) : A^t J A = J\}$ für $J = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$, denn die Einträge von J geben gerade die Werte der symplektischen Form φ auf der kanonischen Basis $e_i, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ von K^{2n} an. Die Bedingung $A^t J A = J$ kann man wieder in n^2 Polynome in den Matrixeinträgen von A übersetzen.

Lemma 1.5 *Jede endliche Untergruppe von $GL_n(K)$ ist eine lineare algebraische Gruppe.*

Insbesondere ist also die zu $\mathcal{S}_n$ isomorphe Untergruppe der Permutationsmatrizen eine lineare algebraische Gruppe.

Beweis : Es sei $B = (b_{ij})$ eine Matrix in $GL_n(K)$. Dann lässt sich die Einpunktmenge $\{B\}$ als Nullstellenmenge von n^2 Polynomen beschreiben: $\{B\} = \big\{A \in GL_n(K) : x_{ij}(A) - b_{ij} = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}\big\}$.

Jetzt sei $G = \{B_1, \ldots, B_m\} \subset GL_n(K)$ eine endliche Untergruppe, und es seien $h_1^{(j)}, \ldots, h_{n^2}^{(j)}$ die Polynome mit $\{B_j\} = \{A \in GL_n(K) : h_1^{(j)}(A) = 0, \ldots, h_{n^2}^{(j)}(A) = 0\}$.

Nun betrachten wir die Teilmenge $G' = \big\{A \in GL_n(K) : h_{i_1}^{(1)} \cdot h_{i_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot h_{i_m}^{(m)}(A) = 0$ für alle $i_1, i_2, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n^2\}\big\}$.

G' ist also die Nullstellenmenge aller Polynome, die man als Produkt gewinnt, indem man für jedes B_j eines der definierenden Polynome als Faktor auswählt.

Offenbar ist $G \subset G'$, denn für jedes B_j verschwindet ein Faktor all dieser Polynome.

Angenommen, es gibt ein $A \in G' \backslash G$. Dann ist A keine der Matrizen B_j, d.h. für jedes j gibt es einen Index i_j mit $h_{i_j}^{(j)}(A) \neq 0$. Dann ist aber auch $h_{i_1}^{(1)} \cdot \ldots \cdot h_{i_m}^{(m)}(A) \neq 0$, was im Widerspruch zu $A \in G'$ steht. Somit ist $G = G'$ eine lineare algebraische Gruppe. $\square$

Beispiel: Wir betrachten nun für $K = \mathbb{C}$ die Untergruppe

$U_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : \overline{A}^t \cdot A = E_n\}$ von $GL_n(\mathbb{C})$.

$U_n(\mathbb{C})$ ist **keine** lineare algebraische Gruppe in $GL_n(\mathbb{C})$, denn die komplexe Konjugation lässt sich nicht durch ein Polynom über $\mathbb{C}$ beschreiben.

Trotzdem kann man $U_n(\mathbb{C})$ mit Hilfe der Theorie der linearen algebraischen Gruppen untersuchen: Diese Theorie gibt es nämlich auch über nicht algebraisch abgeschlossenen Körpern, und $U_n(\mathbb{C})$ ist eine lineare algebraische Gruppe über $\mathbb{R}$.

2 Grundlagen der algebraischen Geometrie

Unsere Objekte, die linearen algebraischen Gruppen, haben wir im vergangenen Abschnitt kennengelernt. Aber was sind die richtigen Abbildungen zwischen diesen Objekten? Dazu brauchen wir ein paar Grundbegriffe der algebraischen Geometrie.

Mit K bezeichnen wir wieder einen algebraisch abgeschlossenen Körper. Wir betrachten den Polynomring $\Omega = K[x_1, \ldots, x_n]$ in $n \geqq 1$ Variablen über K. Jedes Polynom $f \in \Omega$ definiert durch Einsetzen eine Funktion $f : K^n \to K$:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto f(a_1, \ldots, a_n).$$

Definition 2.1 *Eine affine algebraische Menge ist eine Teilmenge X des K^n, so dass endlich viele Polynome $f_1, \ldots, f_r \in \Omega$ existieren mit*

$$X = \{a \in K^n : f_1(a) = \ldots = f_r(a) = 0\}.$$

X ist also die Nullstellenmenge endlich vieler Polynome.

Beispiel: Ist $n = 1$, so sind nur K selbst und alle endlichen Teilmengen von K algebraische Mengen, da jedes Polynom in einer Variablen nur endlich viele Nullstellen hat.

Definition 2.2 *Es seien $X \subset K^m$ und $Y \subset K^m$ zwei algebraische Mengen.*

i) Ein Morphismus $\psi : X \to Y$ von algebraischen Mengen ist eine Abbildung (von Mengen) $\psi : X \to Y$, zu der es Polynome $f_1, \ldots, f_m \in K[x_1, \ldots, x_n]$ gibt, so dass

$$\psi(a) = \big(f_1(a), \ldots, f_m(a)\big)$$

für alle $a \in X \subset K^n$ gilt.

ii) Ein Morphismus $\psi : X \to Y$ von algebraischen Mengen heißt Isomorphismus, wenn es einen Morphismus $\varphi : Y \to X$ von algebraischen Mengen mit $\varphi \circ \psi = id_X$ und $\psi \circ \varphi = id_Y$ gibt.

Vorsicht — ein bijektiver Morphismus algebraischer Mengen muss kein Isomorphismus sein! Dazu betrachten wir die algebraischen Mengen $X = \mathbb{C}$ und $Y = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{C}^2 : x^3 - y^2 = 0\}$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi \quad : \quad & X \to Y \\ & t \mapsto (t^2, t^3) \end{aligned}$$

ist ein bijektiver Morphismus algebraischer Mengen. Die Umkehrabbildung ist jedoch nicht durch Polynome beschreibbar.

Unsere Definition von Isomorphismen algebraischer Mengen ist also nicht so einfach zu handhaben. Wir suchen nach einer besseren Charakterisierung einer algebraischen Menge bis auf Isomorphie.

Dazu betrachten wir eine algebraische Menge $X \subset K^n$ und einen beliebigen Morphismus $\psi : X \to K$ in die algebraische Menge K. Definitionsgemäß existiert ein Polynom $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ mit $\psi(a) = f(a)$ für alle $a \in X$. Ist $g \in K[x_1, \ldots, x_n]$ ein weiteres Polynom mit $\psi(a) = g(a)$ für alle $a \in X$, so folgt $(f - g)(a) = 0$ für alle $a \in X$.

Zwei Polynome ergeben also genau dann denselben Morphismus $X \to K$, wenn ihre Differenz auf X verschwindet.

Definition 2.3 *Für eine algebraische Menge* $X \subset K^n$ *sei*

$$I(X) = \{f \in K[x_1, \dots, x_n] : f(a) = 0 \text{ für alle } a \in X\}.$$

$I(X)$ *heißt Verbindungsideal von* X*.*

Wir können leicht nachrechnen, dass $I(X)$ wirklich ein Ideal im Polynomring $K[x_1, \dots, x_n]$ ist, d.h. dass gilt

i) $I(X)$ ist bezüglich der Addition eine Untergruppe von $K[x_1, \dots, x_n]$.

ii) $f \in I(X), h \in K[x_1, \dots, x_n] \Rightarrow hf \in I(X)$.

Definition 2.4 *Der Quotientenring*

$$\mathcal{O}(X) = K[x_1, \dots, x_n]/I(X)$$

heißt Ring der regulären Funktionen auf X *oder auch Koordinatenring von* X*.*

In der Literatur findet man auch die Bezeichnung $K[X]$ statt $\mathcal{O}(X)$. Das haben wir hier vermieden, da es zur Verwechslungsgefahr mit dem Polynomring führt.

$\mathcal{O}(X)$ ist nicht nur ein Ring, sondern auch eine $K-$Algebra. Wie wir oben gesehen haben, können wir $\mathcal{O}(X)$ mit der Menge der Morphismen von algebraischen Mengen $X \to K$ identifizieren.

Beispiel: Für $X = K^n$ ist $\mathcal{O}(X) = K[x_1, \dots, x_n]$ der Polynomring.

Wir bekommen X aus $\mathcal{O}(X)$ wieder zurück, es gilt nämlich

Lemma 2.5 *Es sei* X *eine affine algebraische Menge. Dann ist* $X = \{a \in K^n : f(a) = 0 \text{ für alle } f \in I(X)\}$.

Beweis : Da X eine affine algebraische Menge ist, gibt es endlich viele Polynome $f_1, \dots, f_r \in K[x_1, \dots, x_n]$ mit $X = \{a \in K^n : f_1(a) = \ldots = f_r(a) = 0\}$. Diese Polynome liegen in $I(X)$, also folgt „$\supset$“. Die Inklusion „$\subset$“ folgt direkt aus der Definition von $I(X)$. $\square$

Ist X eine affine algebraische Menge und $f \in \mathcal{O}(X)$ ein Element des Koordinatenrings $\mathcal{O}(X) = K[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$, so können wir f als Funktion

$$f : X \longrightarrow K$$

auffassen, indem wir $f = g + I(x)$ mit einem Vertreter $g \in K[x_1, \ldots, x_n]$ schreiben und $f(a) = g(a)$ setzen. Da alle Polynome in $I(X)$ auf X verschwinden, hängt diese Definition nicht von der Wahl des Verteters ab.

Wie verhält sich der Koordinatenring von X unter Morphismen?

Dazu betrachten wir algebraische Mengen $X \subset K^n$ und $Y \subset K^m$ sowie einen Morphismus $\varphi : X \to Y$. Dieser sei durch die Polynome $f_1, \ldots, f_m \in K[x_1, \ldots, x_n]$ gegeben, d.h. es gelte

$$\varphi(a) = \big(f_1(a), \ldots, f_m(a)\big)$$

für alle $a \in X$. Diese Polynome liefern einen $K-$Algebra-Homomorphismus

$$\psi : K[x_1, \ldots, x_m] \to K[x_1, \ldots, x_n],$$

der durch $\psi(x_i) = f_i(x_1, \ldots, x_m)$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gegeben ist.

Ist nun $g \in I(Y)$, d.h. ist $g(b) = 0$ für alle $a \in Y$, so ist $\psi(g) = g(f_1, \ldots, f_m)$ ein Polynom in $k[x_1, \ldots, x_n]$. Wir setzen $a \in X$ ein und erhalten $\psi(g)(a) = g\big(f_1(a), \ldots, f_m(a)\big) = 0$, da $\big(f_1(a), \ldots, f_m(a)\big) = \varphi(a) \in X$ ist. Also folgt $\psi\big(I(Y)\big) \subset I(X)$.

Daher vermittelt die Abbildung ψ einen $K-$Algebra-Homomorphismus

$$\varphi^{\#} : \mathcal{O}(Y) = k[x_1, \ldots, x_m]/I(Y) \to K[x_1, \ldots, x_n]/I(X) = \mathcal{O}(X).$$

Definitionsgemäß gilt für alle $g \in \mathcal{O}(Y)$ und alle $a \in X : \varphi^{\#}(g)(a) = g\big(y(a)\big)$.

Satz 2.6 *Die Abbildung $\varphi \mapsto \varphi^{\#}$, die jedem Morphismus algebraischer Mengen den $K-$Algebren-Homomorphismus der Koordinatenringe zuordnet, ist eine Bijektion*

$$\{\textit{Morphismen } \varphi : X \to Y\} \longrightarrow \{K - \textit{Algebren-Homomorphismen } \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)\}.$$

Beweis : Wir konstruieren eine Umkehrabbildung. Dazu starten wir mit einem $K-$Algebren-Homomorphismus

$$\alpha : \mathcal{O}(Y) = K[x_1, \ldots, x_m]/I(Y) \to K[x_1, \ldots, x_n]/I(X) = \mathcal{O}(X)$$

Dieser bildet die Restklassen $X_i + I(Y)$ auf Restklassen $f_i + I(X)$ in $\mathcal{O}(X)$ mit Vertretern $f_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$ ab. Jetzt betrachten wir

$$\begin{array}{rcl} \psi : M^n & \longrightarrow & K^m \\ a & \longmapsto & \big(f_1(a), \ldots, f_n(a)\big). \end{array}$$

Wir wissen, dass für jedes $h \in I(Y)$ das Polynom $h(f_1, \ldots, f_m)$ in $I(X)$ liegt. Also ist $h\big(f_1(a), \ldots, f_m(a)\big) = 0$. Nach Lemma 2.5 ist also $\psi(a) = \big(f_1(a), \ldots, f_m(a)\big) \in Y$. Somit ist $\psi\mid_X : X \to Y$ ein Morphismus algebraischer Mengen. Man rechnet leicht nach, dass wir so eine Umkehrabbildung zu $\varphi \mapsto \varphi^{\#}$ gefunden haben. $\square$

Korollar 2.7 *Zwei algebraische Mengen sind genau dann isomorph, wenn ihre Koordinatenringe isomorph sind.*

Beweis : Das folgt aus Satz 2.6. □

Definition 2.8 *Eine affine Varietät ist eine Menge Z zusammen mit einer $K-$Algebra $\mathcal{O}(Z)$ von Funktionen $Z \to K$, so dass es eine affine algebraische Menge $X \subset K^n$ und eine bijektive Abbildung $\beta : Z \to X$ gibt, für die*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}(X) & \to & \mathcal{O}(Z) \\ f & \mapsto & f \circ \beta \end{array}$$

ein $K-$Algebren-Isomorphismus ist.

In der Definition einer affinen Varietät verlangt man oft zusätzlich, dass $\mathcal{O}(X)$ als Ring reduziert ist, wir sind hier etwas großzügiger.

Beispiel: Wir betrachten die Matrixgruppe $GL_n(K)$ und wollen sie mit der Struktur einer affinen Varietät ausstatten. Dazu definieren wir die Abbildung $\beta : GL_n(K) \to K^{n^2+1}$, indem wir eine Matrix $A = (a_{ij})$ abbilden auf den Vektor

$$\beta(A) = \big(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}, (\det A)^{-1}\big)^t$$

$\beta(A)$ besteht also aus den Matrixeinträgen von A, gefolgt von dem Kehrwert der Determinante.

Das Bild von β liegt in der algebraischen Menge

$$X = \{(x_{11}, \dots, x_{nn}, y) \in K^{n^2+1} : y \det\big((x_{ij})_{i,j}\big) = 1\}$$

in K^{n^2+1}. Offenbar ist

$$\beta : GL_n(K) \longrightarrow X$$

eine Bijektion.

Der Koordinatenring von X ist

$$\mathcal{O}(X) = K[x_{11}, \dots, x_{nn}, y]/\big(y \cdot \det(x_{ij}) - 1\big).$$

Wenn wir also $GL_n(K)$ in der $K-$Algebra $\mathcal{O}\big(GL_n(K)\big) \subset$ Quot $K[x_{11}, \dots, x_{nn}]$ ausstatten, die von $x_{11}, \dots, x_{nn}$ und $\frac{1}{\det(x_{ij})}$ erzeugt wird, so erhalten wir die Struktur einer affinen Varietät auf $GL_n(K)$, denn

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}(X) & \longrightarrow & \mathcal{O}\big(GL_n(K)\big) \\ f & \longmapsto & f \circ \beta \end{array}$$

ist ein Isomorphismus von $K-$Algebren.

Wir wollen nun noch definieren, was Morphismen affiner Varietäten sind.

Definition 2.9 *Ein Morphismus zwischen den affinen Varietäten Z_1 und Z_2 ist eine Abbildung*

$$\psi : Z_1 \to Z_2,$$

so dass

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}(Z_2) & \longrightarrow & \mathcal{O}(Z_1) \\ f & \longmapsto & f \circ \psi \end{array}$$

ein $K-$Algebren-Homomorphismeus ist.

Ein Isomorphismus affiner Varietäten ist wie immer ein Homomorphismus, zu dem eine Umkehrabbildung existiert.

Beispiel: Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{inv} : GL_n(K) & \longrightarrow & GL_n(K) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$$

ist ein Morphismus affiner Varietäten. Dazu muss man sich an die Cramer'sche Regel zur Matrixinversion erinnern:

$$(A^{-1})_{i,j} = \frac{1}{\det A} \mathrm{Adj}(A),$$

wobei $\mathrm{Adj}(A)$ die adjungierte Matrix ist, deren Einträge

$$(\mathrm{Adj}\ A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$$

sind.

Wir wollen jetzt noch die Zariski-Topologie definieren.

Dazu betrachten wir für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ eine Teilmenge

$$V(\mathfrak{a}) = \{a \in K^n : f(a) = 0\} \text{ für alle } f \in \mathfrak{a}\}.$$

Offenbar gilt $\mathfrak{a} \subset b \Rightarrow V(b) \subset V(\mathfrak{a})$.

Lemma 2.5 lässt sich dann so umformulieren: Für eine affine algebraische Menge $X \subset K^n$ gilt

$$X = V\big(I(X)\big)$$

Wir erinnern ohne Beweis an die folgende Tatsache: Der Polynomring $K[x_1, \ldots, x_n]$ ist noethersch, d.h. jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ ist endlich erzeugt. Das bedeutet, dass es endlich viele Elemente $f_1, \ldots, f_r \in \mathfrak{a}$ gibt, so dass jedes $g \in \mathfrak{a}$ sich schreiben lässt als

$$g = h_1 f_1 + \ldots + h_r f_r$$

mit Polynomen $h_1, \ldots, h_r \in K[x_1, \ldots, x_n]$.

Lemma 2.10 *i)* $V\big((0)\big) = K^n$, $V\big((1)\big) = \emptyset$

ii) Für Ideale $\mathfrak{a}, b$ *in* $K[x_1, \dots, x_n]$ *gilt*

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(b) = V(\mathfrak{a} \cap b)$$

iii) Für eine beliebige Familie von Idealen $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ *in* $K[x_1, \dots, x_n]$ *gilt*

$$\bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i).$$

Beweis : In den Übungen. □

Die Nullstellenmengen $V(\mathfrak{a})$ verhalten sich also wie die abgeschlossenen Teilmengen einer Topologie auf K^n.

Definition 2.11 *Eine Teilmenge* $U \subset K^n$ *heißt offen in der Zariski-Topologie, wenn es ein Ideal* $\mathfrak{a} \subset K[x_1, \dots, x_n]$ *gibt, so dass das Komplement*

$$K^n \backslash U = V(\mathfrak{a})$$

ist.

Nach Lemma 2.10 bilden die so definierten offenen Mengen eine Topologie, die wir Zariski-Topologie nennen. Jede affine algebraische Menge ist abgeschlossen in der Zariski-Topologie.

Definition 2.12 *i) Sei* $X \subset K^n$ *eine affine algebraische Menge. Dann definieren wir die Zariski-Topologie auf* X *als die Relativtopologie, d.h. die affinen Mengen in* X *sind genau die Mengen*

$$U \cap X$$

für $U \subset K^n$ *offen in der Zariski-Topologie.*

Die abgeschlossenen Mengen in X *sind also gerade die affinen algebraischen Mengen, die in* X *enthalten sind.*

ii) Ist $\big(Z, \mathcal{O}(Z)\big)$ *eine affine Varietät, so verwenden wir die bijektive Abbildung* $\beta : Z \to X$ *auf eine affine algebraische Menge* X*, um die Zariski-Topologie von* X *auf* Z *herüberzuziehen:* $U \subset Z$ *ist offen ganau dann, wenn* $\beta(U) \subset X$ *offen ist.*

Sei X eine affine algebraische Menge. Dann ist $X = V\big(I(X)\big)$. Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ ist also $X \cap V(\mathfrak{a}) = V\big(\mathfrak{a} + I(X)\big)$ nach Lemma 2.10. Daher sind die abgeschlossenen Teilmengen von X gerade die $V(\mathfrak{b})$ für $I(X) \subset \mathfrak{b}$.

Lemma 2.13 *Jeder Morphismus affiner algebraischer Mengen und jeder Morphismus affiner Varitäten ist stetig in der Zariski-Topologie.*

Beweis : Es genügt, die Behauptung für einen Morphismus $\varphi : X \to Y$ affiner algebraischer Mengen $X \subset K^n$ und $Y \subset K^m$ zu zeigen. Dieser wird nach Satz 2.6 von einem $K-$Algebren-Homomorphismus $\varphi^\# : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ induziert und es gilt für alle $a \in X$ und $g \in \mathcal{O}(Y)$:

$$g\big(\varphi(a)\big) = \varphi^\#(g)(a).$$

Es sei $V(\mathfrak{b})$ mit $I(Y) \subset \mathfrak{b}$ eine abgeschlossene Teilmenge von Y. Dann behaupten wir

$$\varphi^{-1}\big(V(\mathfrak{b})\big) = V\big(\varphi^\#(\mathfrak{b}) \cdot \mathcal{O}(X)\big),$$

wobei $\varphi^\#(\mathfrak{b}) \cdot \mathcal{O}(X)$ das von der Teilmenge $\varphi^\#(\mathfrak{b})$ in $\mathcal{O}(X)$ erzeugte Ideal bezeichnet $\big($also das kleinste Ideal in $\mathcal{O}(X)$, das $\varphi^\#(\mathfrak{b})$ enthält$\big)$.

„$\subset$“: Sei $a \in X$ mit $\varphi(a) \in V(\mathfrak{b})$, also $g\big(\varphi(a)\big) = 0$ für alle $g \in \mathfrak{b}$. Dann ist $\varphi^\#(g)(a) = g\big(\varphi(a)\big) = 0$, also verschwinden alle Polynome in $\varphi^\#(\mathfrak{b})$ auf a. Dann folgt aber $V\big(\varphi^\#(\mathfrak{b}) \cdot \mathcal{O}(X)\big)$.

„$\supset$“: Ist umgekehrt $a \in V\big(\varphi^\#(\mathfrak{b}) \cdot \mathcal{O}(X)\big)$, so ist $\varphi^\#(g)(a) = 0$ für alle $g \in \mathfrak{b}$. Daraus folgt $g\big(\varphi(a)\big) = \varphi^\#(g)(a) = 0$, also $\varphi(a) \in V(\mathfrak{b})$.

$\square$

Aus Lemma 2.13 folgt insbesondere, dass jede Funktion im Koordinatenring einer affinen Varietät oder einer affinen algebraischen Menge stetig in der Zariski-Topologie ist.

Wir definieren jetzt noch Produkte affiner Varietäten. Wir beginnen mit dem einfachen Fall $X = K^n$ und $Y = K^m$. In diesem Fall betrachten wir

$$X \times Y = K^{n+m}.$$

Dies ist eine affine algebraische Menge mit Koordinatenring $K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$, wobei $K[x_1, \dots, x_n]$ und $K[y_1, \dots, y_m]$ die Koordinatenringe von X bzw. Y sind.

Die natürlichen $K-$Algebra Homomorphismen $K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m] \to K[x_1, \dots, x_n]$ und $K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m] \to K[y_1, \dots, y_m]$ liefern die Projektionen $X \times_K Y \to X$ und $X \times_K Y$.

Um allgemeine Produkte zu definieren, brauchen wir das Tensorprodukt von zwei $K-$Algebren. Sind A und B $K-$Algebren, so gibt es eine $K-$Algebra

$$C = A \otimes_K B$$

zusammen mit $K-$Algebren Homomorphismen

$$\alpha : A \to C \text{ und } \beta : B \to C,$$

so dass gilt: Für jede $K-$Algebra D zusammen mit $K-$Algebra-Homomorphismen $\alpha' : A \to D$ und $\beta' : B \to D$ existiert genau ein $K-$Algebren-Homomorphismus $\varphi : A \otimes_K B \to D$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\alpha'"] & \\
A \otimes_K B \arrow[rr] & & D \\
 & B \arrow[ul, "\beta"] \arrow[ur, "\beta'"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Für $A = K[x_1, \ldots, x_n]$ und $B = K[y_1, \ldots, y_m]$ ist offenbar $A \otimes_K B = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$.

Allgemeiner gilt für $A = K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}$ und $B = K[y_1, \ldots, y_m]/\mathfrak{b}$:

$$A \otimes_K B = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]/\mathfrak{c},$$

wobei

$$\mathfrak{c} = \{fh_1 + gh_2 : f \in \mathfrak{a}, g \in \mathfrak{b}, h_1, h_2 \in K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]\}$$

ist.

Nun können wir definieren

Lemma 2.14 *Sind $\big(X, \mathcal{O}(X)\big)$ und $\big(Y, \mathcal{O}(Y)\big)$ affine Varietäten, dann ist das Paar $\big(X \times Y, \mathcal{O}(X) \otimes_K \mathcal{O}(Y)\big)$ auch eine affine Varietät. Sie heißt Produkt von X und Y. Es gibt natürliche Morphismen (Projektionen) affiner Varietäten*

$$X \times Y \to X \text{ und } X \times Y \to Y.$$

Beweis : Nach Definition einer affinen Varietät müssen wir die Behauptung nur für affine algebraische Mengen zeigen. Sind $X \subset K^n$ und $Y \subset K^m$ mit $\mathcal{O}(X) = K[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$ und $\mathcal{O}(Y) = K[y_1, \ldots, y_m]/I(Y)$, so gilt

$$\begin{aligned} X \times Y &= \{(x, y) \in K^{n+m} : f(x) = 0 \text{ für alle } f \in I(X), g(y) = 0 \text{ für alle } g \in I(Y)\} \\ &= \{(x, y) \in K^{n+m} : (fh_1 + gh_2)(x, y) = 0 \text{ für alle} \\ &\qquad f \in I(X), g \in I(Y), h_1, h_2 \in K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]\} \end{aligned}$$

Dann gilt $I(X \times Y) = \{fh_1 + gh_2 : f \in I(X), g \in I(Y), h_1, h_2 \in K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]\}$ (ÜA).

Also ist $X \times Y$ eine algebraische Menge mit

$$\mathcal{O}(X \times Y) = \mathcal{O}(X) \otimes_K \mathcal{O}(Y).$$

Die Projektionen werden von den $K-$Algebren Homomorphismen

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}(X) & \to & \mathcal{O}(X) \otimes_K \mathcal{O}(Y) \text{ und} \\ \mathcal{O}(Y) & \to & \mathcal{O}(X) \otimes_K \mathcal{O}(Y) \end{array}$$

induziert. □

Jetzt können wir die Begriffe aus der Algebraischen Geometrie auf die linearen algebraischen Gruppen anwenden.

Proposition 2.15 *Sei G eine lineare algebraische Gruppe.*

i) G ist eine affine Varietät.

ii) Die Gruppenoperationen

$$\begin{array}{rrcl} \textit{mult:} & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (x,y) & \longmapsto & xy \end{array} \quad \textit{und} \quad \begin{array}{rrcl} \textit{inv:} & G & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

sind Morphismen affiner Varietäten.

Beweis :

i) Definitionsgemäß ist G Nullstellenmenge endlich vieler Polynome $f_1, \ldots, f_r$ aus $K[x_{11}, \ldots, x_{nn}]$ in $GL_n(K)$. Wir haben oben gesehen, dass $GL_n(K)$ vermöge

$$\begin{array}{rcl} \beta : GL_n(K) & \to & X = \{(x_{11}, \ldots, x_{nn}, y) \in K^{n^2+1} : y \det\ (x_{ij}) - 1 = 0\} \\ A & \mapsto & \big((a_{ij})_{i,j}, (\det A)^{-1}\big) \end{array}$$

die Struktur einer affinen Varietät erhält. Unter dieser Bijektion β wird

$$G = \{A \in GL_n(K) : f_1(A) = \ldots = f_r(A) = 0\}$$

bijektiv auf die affine algebraische Menge

$$Y = \{(x_{11}, \ldots, x_{nn}, y) \in K^{n^2+1} : y \det(x_{ij}) - 1 = 0,$$

$$f_1(x_{11}, \ldots, x_{nn}) = \ldots = f_r(x_{11}, \ldots, x_{nn}) = 0\}$$

abgebildet. Wir definieren den Koordinatenring von G als die $K-$Algebra

$$\{f \circ \beta : f \in \mathcal{O}(Y)\}.$$

So wird G zu einer affinen Varietät.

ii) Da G eine Untergruppe von $GL_n(K)$ ist, genügt es, die Behauptung für $G = GL_n(K)$ zu zeigen. Dass inv ein Morphismus ist, haben wir oben schon nachgerechnet. Die Multiplikationsabbildung von Matrizen ist polynomial in den Einträgen, daher ist auch mult ein Morphismus.

$\square$

Jetzt können wir definieren, was die richtigen Abbildungen linearer algebraischer Gruppen sind.

Definition 2.16 *Es seien G und H lineare algebraische Gruppen. Ein Morphismus*

$$f : G \to H$$

ist ein Homomorphismus von Gruppen, der gleichzeitig ein Morphismus affiner Varietäten ist.

Mit $\mathrm{Hom}(G, H)$ bezeichnen wir die Menge der Morphismen linearer algebraischer Gruppen von G nach H.

Beispiel (Morphismen von Tori)

Wir bezeichnen die lineare algebraische Gruppe $T_1 = \{x \in K : x \neq 0\}$ ab sofort mit $\mathbb{G}_m$ und nennen sie die multiplikative Gruppe.

Wir wollen $\mathrm{Hom}(T_n, \mathbb{G}_m)$ bestimmen. Dazu betrachten wir zunächst den Koordinatenring $\mathcal{O}(T_n)$ von T_n. Unter der Einbettung

$$T_n \hookrightarrow GL_n(K) \overset{\beta}{\hookrightarrow} K^{n^2+1}$$

wird T_n bijektiv auf die Menge

$$Y = \{(x_1, \ldots, x_{nn,y}) \in K^{n^2+1} : x_{ij} = 0 \text{ für alle } i \neq j, \left(\prod_{i=1}^{n} x_{ii}\right) y = 1\}$$

abgebildet. Wir zeigen nun, dass $I(Y)$ das von den Polynomen x_{ij} für $i \neq j$ und $\left(\prod_{i=1}^{n} x_{ii}\right) y - 1$ erzeugte Ideal ist:

Ist $g \in K[x_{11}, \ldots, x_{nn}, y]$ ein beliebiges Polynom, das auf ganz Y verschwindet, so schreiben wir

$$g = g_1 + g_2$$

mit $g_1 \in K[x_{11}, x_{22}, \ldots, x_{nn}]$ und einem Polynom g_2, für das in jedem Summanden mindestens ein x_{ij}mit $i \neq j$ vorkommt. Dann verschwindet auch g_1 auf Y. Wir müssen also nur zeigen, dass jedes Polynom $g \in K[x_{11}, x_{22}, \ldots, x_{nn}, y]$ (Achtung: hier haben wir die Variablen außerhalb der Diagonale weggelassen), das auf ganz Y verschwindet, ein Vielfaches von $f = \big(\prod_{i=1}^{n} x_{ii}\big)y - 1$ ist. Dazu nehmen wir an, dies sei nicht der Fall und betrachten ein g mit minimalem $y-$Grad, das kein Vielfaches von f ist. Also ist

$$g = h_d(x_{11}, \dots, x_{nn})y^d + \dots + h_1(x_{11}, \dots, x_{nn})y + h_0(x_{11}, \dots, x_{nn}).$$

Wir multiplizieren g mit $\big(\Pi x_{ii}\big)^d$ und subtrahieren

$$h_d(x_{11}, \dots, x_{nn})f^d.$$

Das liefert ein Polynom mit echt kleinerem $y-$Grad, das auf ganz Y verschwindet und auch kein Vielfaches von f ist. Also ist die Annahme falsch und unsere Behauptung über $I(Y)$ bewiesen.

Wir erhalten also

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}(Y) & = & K[x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}, y]/I(Y) \\ & = & K[x_{11}, x_{22}, \dots, x_{nn}]/\big((\prod_{i=1}^{n} x_{ii})y - 1\big). \end{array}$$

Es sei

$$K[x_{11}^{\pm 1}, \dots, x_{nn}^{\pm 1}] = \{ \sum_{I=(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{Z}^n} a_I x_1^{i_n} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n} : a_I \in K \}$$

der Ring der Laurent-Polynome. Dann liefert

$$\begin{array}{rcl} K[x_{11}^{\pm 1}, \dots, x_{nn}^{\pm 1}] & \to & \mathcal{O}(Y) \\ x_{ii} & \mapsto & x_{ii} \\ x_{ii}^{-1} & \mapsto & (\prod_{j\neq i} x_{jj}) \cdot y \end{array}$$

einen Isomorphismus von $K-$Algebren (ÜA).

Also ist der Koordinatenring des Torus T_n gerade

$$\mathcal{O}(T_n) = K[a_1^{\pm 1}, \dots, a_n^{\pm 1}],$$

wobei $a_i^{\pm 1}$ die folgenden Funktionen auf T_n sind:

$$\begin{array}{rcl} a_i\big(\mathrm{diag}(t_1, \dots, t_n)\big) & = & t_i \\ a_i^{-1}\big(\mathrm{diag}(t_1, \dots, t_n)\big) & = & t_i^{-1}. \end{array}$$

Insbesondere ist der Koordinatenring von $\mathbb{G}_m = T_1$ gerade

$$\mathcal{O}(\mathbb{G}_m) = K[a^{\pm 1}]$$

mit der Funktion $a : \mathbb{G}_m \to K, a(x) = x$.

Wir bestimmen nun $\mathrm{Hom}(T_n, \mathbb{G}_m)$. Sei $\varphi : T_n \to \mathbb{G}_m$ ein Morphismus linearer algebraischer Gruppen. Dann ist f ein Morphismus affiner Varietäten, d.h.

$$\begin{array}{rcl} \varphi^{\#} : \mathcal{O}(\mathbb{G}_m) & \to & \mathcal{O}(T_n) \\ f & \mapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

ist ein $K-$Algebren-Homomorphismus. Also ist $\varphi^{\#}(a) = a \circ \varphi = g(a_1, \ldots, a_n)$ ein Laurent-Polynom, und für beliebiges $f \in K[a^{\pm}] = \mathcal{O}(\mathbb{G}_m)$ gilt

$$\varphi^{\#}(f) = f\big(g(a_1^{\pm 1}, \ldots, a_n^{\pm 1}\big).$$

Gleichzeitig ist φ aber ein Gruppenhomomorphismus, d.h. $\varphi(st) = \varphi(s)\varphi(t)$ für alle $s, t \in T_n$. Daraus folgt $a\big(\varphi(st)\big) = a\big(\varphi(s)\big)a\big(\varphi(t)\big)$ für alle $s, t \in T_n$. Für $t = \mathrm{diag}(t_1, \cdots, t_n)$ und $s = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_n)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} g(s_1t_1, \ldots, s_nt_n) &= a \circ \varphi(st) = a\big(\varphi(s)\big)a\big(\varphi(t)\big) \\ &= g(s_1, \ldots, s_n)g(t_1, \ldots, t_n). \end{aligned}$$

Ist $g = \sum\limits_{I \in \mathbb{Z}^n} c_I a_1^{i_1} \ldots a_n^{i_n}$, so gilt also

$$\sum c_I (s_1t_1)^{i_1} \cdot \ldots \cdot (s_nt_n)^{i_n} = \big(\sum_I c_I s_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot s_n^{i_n}\big)\big(\sum_I c_I t_i^{i_1} \cdot \ldots \cdot t_n^{i_n}\big)$$

für alle $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n \in K^{\times}$. Daraus folgt $c_I^2 = 1$ für alle I und $c_I c_J = 0$ für $I \neq J$.

Da $1 = \varphi^{\#}(aa^{-1}) = \varphi^{\#}(a)\varphi^{\#}(a^{-1})$ gilt, ist g nicht das Nullpolynom, sondern invertierbar in $K[a_1^{\pm 1}, \ldots, a_n^{\pm n}]$.

Also existiert ein Index I mit $c_I \neq 0$. Es folgt $c_I = 1$. Für alle $J \neq I$ muss dann $c_J = 0$ sein. Somit ist g von der Form

$$g(a_1, \ldots, a_n) = a_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{i_n}$$

für ein $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{Z}^n$. Daher ist φ die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : T_n &\rightarrow \mathbb{G}_m \\ \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n) &\mapsto t_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot t_n^{i_n}. \end{aligned}$$

Umgekehrt liefert jedes $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{Z}^n$ einen Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi : T_n &\rightarrow \mathbb{G}_m \\ \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n) &\mapsto t_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot t_n^{i_n}, \end{aligned}$$

der ein Morphismus affiner Varietäten ist. Also erhalten wir

$$\mathrm{Hom}(T_n, \mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Z}^n.$$

Dies ist nicht nur eine Bijektion, sondern auch ein Gruppenhomomorphismus (ÜA).

Definition 2.17 *Für jede lineare algebraische Gruppe G heißt*

$$X^*(G) = Hom(G, \mathbb{G}_m)$$

die Charaktergruppe von G.

Wir haben oben gesehen, dass $X^*(T_n) \simeq \mathbb{Z}^n$ ist.

Wir zeigen jetzt noch, dass Charaktere immer linear unabhängig sind.

Lemma 2.18 *Sei H eine beliebige Gruppe und X die Menge der Gruppenhomomorphismen von H nach $K^\times$. Dann ist X eine linear unabhängige Teilmenge des $K-$Vektorraums aller Funktionen von H nach K.*

Beweis : Falls X linear abhängig ist, so hat X eine endliche linear abhängige Teilmenge. Es sei n die kleinste Mächtigkeit einer linear abhängigen Teilmenge von X. Da $0 \notin X$ ist, ist $n \geqq 2$.

Es gibt also $\chi_1, \dots, \chi_n \in X$ mit

$$\alpha_1\chi_1 + \ldots + \alpha_{n-1}\chi_{n-1} + \alpha_n\chi_n = 0,$$

so dass nicht alle α_i Null sind. Aufgrund der Minimalität von n sind sogar alle $\alpha_i \neq 0$. Also erhalten wir eine Gleichung der Form

$$f := \beta_1\chi_1 + \ldots + \beta_{n-1}\chi_{n-1} + \chi_n = 0$$

mit $\beta_1, \dots, \beta_{n-1} \in K^\times$. Nun ist $\chi_n \neq \chi_1$, also existiert ein $h_0 \in H$ mit $\chi_n(h_0) \neq \chi_1(h_0)$. Daraus folgt für alle $h \in H$:

$$\begin{aligned} 0 &= f(h_0h) - \chi_n(h_0)f(h) \\ &= \beta_1\chi_1(h_0h) + \ldots + \beta_{n-1}\chi_{n-1}(h_0h) - \chi_n(h_0)[\beta_1\chi_1(h) + \ldots + \beta_{n-1}\chi_{n-1}(h)] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i\big(\chi_i(h_0) - \chi_n(h_0)\big)\chi_i(h). \end{aligned}$$

Setzen wir $c_i = \beta_i\big(\chi_i(h_0) - \chi_n(h_0)\big)$, so ist $c_1 \neq 0$ und

$$c_1\chi_1 + \ldots + c_{n-1}\chi_{n-1} = 0$$

ein Widerspruch zur Minimalität von n. □

Wir haben in Lemma 1.5 gesehen, dass jede endliche Untergruppe von $GL_n(K)$ eine lineare algebraische Gruppe ist. Jetzt werden wir noch zeigen, dass für endliche lineare algebraische Gruppen die Morphismen gerade die gewöhnlichen Gruppenhomomorphismen sind.

Proposition 2.19 *Es seien G und H endliche lineare algebraische Gruppen. Dann ist*

$$Hom(G, H)$$

die Menge der (gewöhnlichen) Gruppenhomomorphismen von G nach H.

Beweis : Wir müssen zeigen, dass jeder Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ ein Morphismus affiner Varietäten ist. Dazu betrachten wir Bijektionen

$$\begin{array}{rcl} \alpha : G & \to & X \subset K^n \text{ und} \\ \beta : H & \to & Y \subset K^m \end{array}$$

auf affine, algebraische Mengen X und Y. $\varphi : G \to H$ liefert dann eine Abbildung $\psi : X \to Y$. Die Menge $X = \{a_1, \dots, a_r\}$ ist endlich. Wir benutzen die folgende Tatsache (ÜA): Sind endlich viele Werte $a_1, \dots, a_r \in K^n$ und $b_1, \dots, b_r \in K$ gegeben, so existiert ein Polynom $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ mit $f(a_1) = b_1, \dots, f(a_r) = b_r$. (Dies nennt man Polynominterpolation). Wir wenden diese Tatsache auf alle Koordinaten von $\psi(a_1), \dots, \psi(a_r)$ an und erhalten Polynome $f_1, \dots, f_m \in K[x_1, \dots, x_n]$ mit

$$\big(f_1(a_i), \dots, f_m(a_i)\big) = \psi(a_i).$$

Also ist ψ ein Morphismus von algebraischen Mengen. Daraus folgt, dass φ ein Homomorphismus von linearen algebraischen Gruppen ist. $\square$

3 Liealgebren

Wir wollen nun zeigen, dass zu jeder linearen algebraischen Gruppe eine Liealgebra gehört.

Definition 3.1 *Eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist ein $K-$Vektorraum zusammen mit einer Verknüpfung*

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},$$

die folgende Bedingungen erfüllt:

i) $[\ ,\ ]$ *ist eine Bilinearform*

ii) $[x, x] = 0$ *für alle* $x \in \mathfrak{g}$

iii) $[\ ,\ ]$ *erfüllt die Jacobi-Identität* $\big[x, [y, z]\big] + \big[y, [z, x]\big] + \big[z, [x, y]\big] = 0.$

Aus *i)* und *ii)* folgt, dass $[\ ,\ ]$ antisymmetrisch ist, denn es gilt für alle $x, y \in \mathfrak{g}$

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & [x-y, x-y] \\ & = & [x,x] - [x,y] - [y,x] + [y,y] \\ & = & -[x,y] - [y,x], \end{array}$$

woraus $[x, y] = -[y, x]$ folgt.

Beispiel: Wir versehen den $K-$Vektorraum $M_n(K) = \{n \times n-$Matrizen über $K\}$ mit der Verknüpfung

$$[A, B] = AB - BA.$$

Diese ist bilinear in beiden Argumenten und erfüllt $[A, A] = 0$ sowie *iii*), denn

$$\begin{array}{rl} & A(BC - CB) - (BC - CB)A \\ + & B(CA - AC) - (CA - AC)B \\ + & C(AB - BA) - (AB - BA)C \\ = & 0 \end{array}$$

für alle $A, B, C \in M_n(K)$, wie man leicht nachrechnet.

Allgemeiner kann man für jede assoziative $K-$Algebra $\mathfrak{a}$ eine Liealgebrastruktur auf $\mathfrak{a}$ definieren, indem man

$$[x, y] = xy - yx$$

setzt, wobei die Multiplikation hier die Algebra-Multiplikation ist.

Wir wollen diese Liealgebrastruktur auf $M_n(K)$ jetzt auf konzeptionelle Weise mit der Liegruppe $GL_n(K)$ in Verbindung bringen und auch für andere lineare algebraische Gruppen Liealgebren definieren.

Definition 3.2 *Sei X eine affine Varietät und $a \in X$.*

Dann ist der Tangentialraum von X in a definiert als

$T_{X,a} = \{\delta : \mathcal{O}(X) \to K : \delta$ ist eine Abbildung von $K-$Vektorräumen mit $\delta(f \cdot g) = f(a)\delta(g) + g(a)\delta(f)$ für alle $f, g \in \mathcal{O}(X)\}$.

Eine Abbildung $\delta : \mathcal{O}(X) \to K$ mit der obigen Eigenschaft nennt man auch eine Derivation in a.

Die Derivationseigenschaft erinnert an die Produktregel für Ableitungen. In der Tat gilt:

Satz 3.3 *Für $X = K^n$ und $a \in X$ ist $T_{X,a} = \bigoplus_{i=1}^{n} K\left(\frac{\partial}{\partial_{x_i}}(a)\right)$, wobei $\frac{\partial}{\partial_{x_i}}(a) : \mathcal{O}(X) = K[x_1, \ldots, x_n] \to K$ definiert ist durch $\frac{\partial}{\partial_{x_i}}(a)(f) = \frac{\partial f}{\partial_{x_i}}(a)$.*

Beweis : Nach der Produktregel für Ableitungen ist jedes $\frac{\partial}{\partial_{x_i}}(a)$ ein Element von $T_{x,a}$. Diese Elemente sind offenbar linear unabhängig (ÜA).

Sei $\delta \in T_{X,a}$ eine beliebige Derivation in a auf $\mathcal{O}(X) = K[x_1, \ldots, x_n]$. Wir setzen

$$c_i = \delta(x_i) \in K$$

für $i = 1, \ldots, n$.

Dann gilt für alle $\alpha \in K$ und $k \in \mathbb{N}_o$: $\delta(\alpha x_i^k) = \alpha k \delta(x_i) a_i^{k-1} = \alpha k c_i a_i^{k-1}$ und für $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{array}{rl} & \delta(\alpha x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}) \\ = & \alpha(k_1 c_1 a_1^{k_1 - 1} a_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{k_n} + k_2 c_2 a_1^{k_1} a_2^{k_2 - 1} \ldots a_n^{k_n} + \ldots + k_n c_n a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n - 1}) \\ = & \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a). \end{array}$$

Somit ist $\frac{\partial}{\partial_{x_1}}(a), \ldots, \frac{\partial}{\partial_{x_n}}(a)$ in der Tat eine Basis von $T_{X,a}$. □

Proposition 3.4 *Es sei X eine affine algebraische Menge in K^n und $a \in X$. Dann ist*

$$\begin{array}{rcl} T_{X,a} & = & \{\delta \in T_{K^n,a} : \delta(f) = 0 \textit{ für alle } f \in I(X)\} \\ & = & \{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial}{\partial x_i}(a) : \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \textit{ für alle } f \in I(X)\}. \end{array}$$

Beweis : Wir wollen die Derivationen $\delta : \mathcal{O}(X) \to K$ in a bestimmen. Da $\mathcal{O}(X) = K[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$ ist, liefert jedes δ durch Verknüpfung mit der Quotientenabbildung

$$K[x_1, \ldots, x_n] \to K[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$$

eine Derivation in $T_{K^n,a}$.

Die so definierte Abbildung

$$i : T_{X,a} \to T_{K^n,a}$$

ist offenbar injektiv mit Bild $(i) \subset \{\delta \in T_{K^n,a} : \delta(f) = 0 \text{ für alle } \delta \in I(X)\}$.

Sei umgekehrt $\delta \in T_{K^n,a}$ mit $\delta(f) = 0$ für alle $f \in I(X)$. Dann faktorisiert die Abbildung $\delta : K[x_1, \ldots, x_n] \to K$ über $\mathcal{O}(X) = K[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$. Die so entstehende Abbildung

$$\mathcal{O}(X) \to K$$

ist ebenfalls eine Derivation in a, also liegt δ im Bild von i. □

Um Tangentialräume einfacher berechnen zu können, führen wir die sogenannten dualen Zahlen ein:

Definition 3.5 *Wir bezeichnen den Ring $K[x]/(x^2)$ mit $K[\epsilon]$, wobei $\epsilon = x + (x^2)$ die Restklasse von x ist. $K[\epsilon]$ heißt auch der Ring der dualen Zahlen. Er enthält alle Ausdrücke der Form $a + b\epsilon$ mit $a, b \in K$, und man rechnet*

$$(a + b\epsilon)(c + d\epsilon) = ac + (ad + bc)\epsilon,$$

da $\epsilon^2 = 0$ gilt.

Wir betrachten nun den Polynomring $K[\epsilon][x_1, \dots, x_n]$ in n Unbestimmten mit Koeffizienten in $K[\epsilon]$. Wir können in ein Polynom $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ auch $(x_1+v_1\epsilon, \dots, x_n+v_n\epsilon)$ für $v_1, \dots, v_n \in K$ einsetzen und erhalten so ein Polynom

$$f(x_1 + v_1\epsilon, \dots, x_n + v_n\epsilon) \text{ in } K[\epsilon][x_1, \dots, x_n].$$

Beispiel: $f(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_1^2 + x_2$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(x_1 + v_1\epsilon, x_2 + v_2\epsilon) &= (x_1 + v_1\epsilon)(x_2 + v_2\epsilon) + (x_1 + v_1\epsilon)^2 + x_2 + v_2\epsilon \\ &= x_1x_2 + x_1^2 + x_2 + (x_2 + 2x_1)v_1\epsilon + (x_1 + 1)v_2\epsilon \end{aligned}$$

Wegen $\epsilon^2 = 0$ verschwinden alle Terme, deren Grad in ϵ größer als eins ist.

Lemma 3.6 *Für $f \in K[x_1, \dots, x_n], a_1, \dots, a_n \in K$ und $v_1, \dots, v_n \in K$ gilt*

$$\begin{aligned} & f(a_1 + v_1\epsilon, \dots, a_n + v_n\epsilon) \\ = \; & f(a_1, \dots, a_n) + \left(\sum_{i=1}^{n} \tfrac{\partial f}{\partial x_i}(a_i)v_i\right)\epsilon \\ = \; & f(a_1, \dots, a_n) + (\nabla f(a_1 \dots a_n) \cdot (v_1, \dots, v_n))\,\epsilon, \end{aligned}$$

wobei wir

$$\nabla f(a_1 \dots a_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 \dots a_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1 \dots a_n) \end{pmatrix}$$

setzen und diesen Spaltenvektor mit dem Zeilenvektor $(v_1, \dots, v_n)$ multiplizieren.

Beweis : Wir müssen diese Formel nur für Monome $f = \alpha x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ zeigen. Hier gilt

$$\nabla f(a_1, \dots, a_n) = \alpha \begin{pmatrix} k_1 a_1^{k_1-1} \cdot \ldots \cdot a_n^{k_n} \\ \vdots \\ k_n a_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{k_n-1} \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist wegen $\epsilon = 0$

$$\begin{aligned} & f(a_1 + v_1\epsilon, \dots, a_n + v_n\epsilon) \\ = \; & \alpha(a_1 + v_1\epsilon)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (a_n + v_n\epsilon)^{k_n} \\ = \; & \alpha\big((a_1^{k_1} + k_1a_1^{k_1-1}v_1\epsilon) \cdot \ldots \cdot (a_n^{k_n} + k_na_n^{k_n-1}v_n\epsilon)\big) \\ = \; & \alpha\big(a_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{k_n} + k_1a_1^{k_1-1}v_1\epsilon(a_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{k_n}) + \ldots + k_na_n^{k_n-1}v_n\epsilon(a_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot a_{n-1}^{k_{n-1}})\big) \\ = \; & f(a_1, \dots, a_n) + \tfrac{\partial f}{\partial_{x_1}}(a_1, \dots, a_n)v_1\epsilon + \ldots + \tfrac{\partial f}{\partial_{x_n}}(a_1, \dots, a_n)v_n\epsilon \\ = \; & f(a_1, \dots, a_n) + \big(\nabla f(a_1, \dots, a_n) \cdot (v_1, \dots, v_n)\big)\epsilon. \end{aligned}$$

□

Insbesondere folgt aus Lemma 3.6 : Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, n$$

genau dann, wenn $f(a_1 + v_1\epsilon, \dots, a_n + v_n\epsilon) = f(a_1, \dots, a_n)$.

Korollar 3.7 *Es sei $X \subset K^n$ eine affine algebraische Menge und $a = (a_1, \ldots, a_n) \in X \subset K^n$. Dann ist*

$$T_{X,a} = \left\{ \delta = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(a) \in T_{K^n,a} : f(a_1 + v_1\epsilon, \ldots, a_n + v_n\epsilon) = 0 \textit{ für alle } f \in I(X) \right\}.$$

Beweis : Nach Proposition 3.4 ist

$$T_{X,a} = \{\delta \in T_{K^n,a} : \delta(f) = 0 \text{ für alle } f \in I(X)\}$$

Nun ist $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ für alle $f \in I(X)$. Also gilt für jedes $\delta = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(a) \in T_{K^n,a}$:

$$\begin{aligned} \delta(f) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} v_i \tfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= 0 \\ \overset{3.6.}{\Leftrightarrow} f(a_1 + v_1\epsilon, \ldots, a_n + v_n\epsilon) &= 0. \end{aligned}$$

□

Beispiel 1: Wir betrachten die affine Varietät $GL_n(K)$ und die bekannte Bijektion

$$\beta : GL_n(K) \to X = \{(x_{ij}, y) \in k^{n^2+1} : \big(\det(x_{ij})\big)y - 1 = 0\}$$

Dann ist

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(X) & \to & \mathcal{O}\big(GL_n(K)\big) \\ f & \mapsto & f \circ \beta \end{array}$$

ein Isomorphismus von $K-$Algebren, also ist für $E_n \in GL_n(K)$

$$T_{GL_n(K)}, E_n \simeq T_{X,e}$$

mit $e = \beta(E_n) = (e_{ij}, 1)$, denn $\det E_n = 1$. Nach Korollar 3.7 ist

$$T_{X,e} = \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} v_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}(e) + v_0 \frac{\partial}{\partial y}(e) \in T_{K^{n^2+1}}, e : \big(\det(e_{ij} + v_{ij}\epsilon)_{i,j} \cdot (1 + v_0\epsilon)\big) - 1 = 0 \right\},$$

denn es ist $I\big(GL_n(K)\big) = \big(\det(x_{ij}) \cdot y - 1)$ (ÜA). Nun ist

$$\begin{aligned} & \det(e_{ij} + v_{ij}\epsilon)_{i,j} \\ = \ & \det(E_n + V\epsilon) \text{ für } V = (v_{ij})_{i.j} \\ \overset{\text{Übung}}{=} \ & 1 + \epsilon \text{ Spur } V \\ = \ & 1 + \epsilon(v_{11} + \ldots + v_{nn}). \end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned} & \det(e_{ij} + v_{ij}\epsilon)_{i,j} \cdot (1 + v_0\epsilon) - 1 \\ = \ & \big(1 + \epsilon(v_{11} + \ldots + v_{nn})\big)(1 + v_0\epsilon) - 1 \\ = \ & 1 + \epsilon(v_0 + v_{11} + \ldots + v_{nn}) - 1 \text{ , denn } \epsilon^2 = 0 \\ = \ & \epsilon(v_0 + v_{11} + \ldots + v_{nn}). \end{aligned}$$

Da $\epsilon(v_0 + v_{11} + \ldots + v_{nn}) = 0$ ist genau dann, wenn $(v_0 + v_{11} + \ldots + v_{nn}) = 0$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} T_{X,e} &= \left\{ \sum_{ij=1}^{n} v_{ij} \tfrac{\partial}{\partial x_{ij}}(e) + v_0 \tfrac{\partial}{\partial y}(e) \in T_{K^{n^2+1},e} : v_0 + v_{11} + \ldots v_{nn} = 0 \right\} \\ &\simeq \left\{ \sum_{ij=1}^{n} v_{ij} \tfrac{\partial}{\partial x_{ij}}(e) : v_{ij} \in K^{n^2} \text{ beliebig} \right\}, \end{aligned}$$

wenn wir $v_0 = -v_{11} - \ldots - v_{nn}$ setzen. Also ist

$$T_{GL_n(K),E_n} \simeq \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} v_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}(e) \right\} \simeq K^{n^2},$$

wobei dem Vektor $(v_{ij})_{i,j} \in K^{n^2}$ die Derivation $\sum\limits_{i,j=1}^{n} v_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}(e)$ entspricht. Wir erhalten also eine Identifikation mit $K^{n^2} = \mathrm{Mat}_n(K)$ wie oben!

Beispiel 2: Wir betrachten die affine Varietät $SL_n(K)$ mit der Bijektion

$$\beta_{|SL_n(K)} : SL_n(K) \longrightarrow Y = \{(x_{ij}) \in K^{n^2} : \det(x_{ij}) = 1\}$$

Analog zu Beispiel 1) gilt

$$\begin{aligned} T_{SL_n(K),E_n} &\simeq T_{y,e} \text{ mit } e = \beta(E_n) \\ &= \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} v_{ij} \tfrac{\partial}{\partial x_{ij}}(e) : \det(e_{ij} + v_{ij}\epsilon) = 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} v_{ij} \tfrac{\partial}{\partial x_{ij}}(e) : \mathrm{Spur}(v_{ij})_{i,j} = 0 \right\}, \end{aligned}$$

denn $\det(e_{ij} + v_{ij}\epsilon)_{i,j} = 1 + \epsilon \text{ Spur } (v_{ij})_{i,j}$ (Übungen).

Also ist $T_{SL_n(k),E_n}$ isomorph zum Unterraum der Matrizen mit Spur 0 in $\mathrm{Mat}_n(K)$.

Lemma 3.8 *Ist $\varphi : T \to Y$ ein beliebiger Morphismus affiner Varietäten mit $\varphi(a) = b$. Dann induziert φ auf natürliche Weise einen $K-$Vektorraum-Homomorphismus*

$$(T\varphi)_a : T_{X,a} \to T_{Y,b}.$$

Beweis : Wir wissen, dass $\varphi : X \to Y$ zu einem $K-$Algebrenhomomorphismus

$$\varphi^{\#} : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$$

gehört. Also erhalten wir durch Verknüpfung mit $\varphi^{\#}$ eine natürliche Abbildung

$$T_{X,a} \longrightarrow T_{Y,b},$$

die jede Derivation $\delta : \mathcal{O}(X) \to K$ in a auf $\delta \circ \varphi^{\#} : \mathcal{O}(Y) \to K$ abbildet. Wir rechnen nun nach, dass $\delta \circ \varphi^{\#}$ tatsächlich eine Derivation in b ist. Für $f, g \in \mathcal{O}(Y)$ gilt nämlich

$$\begin{aligned}
\delta \circ \varphi^{\#}(fg) &= \delta\big(\varphi^{\#}(f)\varphi^{\#}(g)\big) \\
&= \varphi^{\#}(f)(a)\delta\big(\varphi^{\#}(g)\big) + \varphi^{\#}(g)(a)\delta\big(\varphi^{\#}(f)\big) \\
&= f(b)\delta\big(\varphi^{\#}(g)\big) + g(b)\delta\big(\varphi^{\#}(f)\big),
\end{aligned}$$

denn es gilt $\varphi^{\#}(f)(a) = f\big(\varphi(a)\big) = f(b)$ (analog für g statt für f). □

Korollar 3.9 *Ist $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus linearer algebraischer Gruppen, so erhalten wir eine lineare Abbildung*

$$(T\varphi)_e : T_{G,e} \to T_{H,e}.$$

Beweis : Da $\varphi(e) = e$ ist, folgt dies aus Lemma 3.8. □

Eine lineare algebraische Gruppe G erhält ihre Struktur als affine Varietät über die Einbettung

$$\begin{array}{ccc}
GL_n(K) & \xrightarrow{\beta} & X \subset K^{n^2+1} \\
\bigcup & & \bigcup \\
G & \longrightarrow & \beta(G)
\end{array}$$

Insbesondere ist $I\big(\beta(G)\big) \supset I(X)$, d.h. das Verschwindungsideal von $\beta(G)$ enthält das Verschwindungsideal von X. Somit ist

$$\mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}\big(\beta(G)\big)$$

surjektiv. Also ist auch

$$\mathcal{O}\big(GL_n(K)\big) \longrightarrow \mathcal{O}(G)$$

surjektiv. Gleichzeitig folgt aus Proposition 3.4

$$T_{G,e} \subset T_{GL_n(K),e} \simeq \mathrm{Mat}_n(K).$$

Wir haben schon gesehen, dass wir die $K-$Algebra $\mathrm{Mat}_n(K)$ mit einer Lieklammer $[A, B] = AB - BA$ ausstatten können. Wir wollen nun zeigen, dass diese sich zu einer Lieklammer auf $T_{G,e}$ einschränken lässt. Dazu zeigen wir zunächst eine andere Beschreibung der Lieklammer auf $\mathrm{Mat}_n(K)$.

Jedes $g \in GL_n(K)$ liefert durch Konjugation eine Abbildung

$$\begin{aligned}
\mathrm{Int}\,(g) : GL_n(K) &\to GL_n(K) \\
h &\mapsto g\,h\,g^{-1}.
\end{aligned}$$

Dieser ist ein Morphismus affiner Varietäten, denn er ist durch Polynome in den Matrizenträgern gegeben.

Lemma 3.10 *Die zugehörige Abbildung*

$$\big(TInt(g)\big)_e : T_{GL_n(K),e} \to T_{GL_n(K),e}$$

auf den Tangentialräumen ist gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} Mat_n(K) & \longrightarrow & Mat_n(K) \\ A & \longmapsto & g\ A\ g^{-1}. \end{array}$$

Dazu identifizieren wir $T_{GL_n(K),e} \simeq Mat_n(K)$ wie im obigen Beispiel.

Beweis : Definitionsgemäß ist $\big(\mathrm{TInt}(g)\big)_e$ die Abbildung, die einer Derivation δ auf $\mathcal{O}\big(GL_n(K)\big)$ die Derivation $\delta \circ \mathrm{Int}(g)^{\#}$ zuordnet, wobei $\mathrm{Int}(g)^{\#} : \mathcal{O}\big(GL_n(K)\big) \to \mathcal{O}\big(GL_n(K)\big)$ die durch $\mathrm{Int}(g)$ induzierte Abbildung auf den Koordinatenringen ist.

Die Identifikation $\mathrm{Mat}_n(K) \overset{\sim}{\to} T_{GL_n(K),e}$ ist nach dem obigen Beispiel die Abbildung, die einer Matrix $V = (v_{ij})$ die Derivation

$$\sum_{i,j=1}^{n} v_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}(e)$$

auf $K[x,y]/(\det(x_{ij})y - 1) \simeq \mathcal{O}\big(GL_n(K)\big)$ zuordnet. Die Abbildung $\mathrm{Int}(g)$ vermittelt auf $K[x,y]/(\det(x_{ij})y - 1\big)$ einen $K-$Algebra-Automorphismus, der x_{ij} auf den Koeffizienten von

$$g(x_{ij})_{i,j}\ g^{-1}$$

an der Stelle (i,j), also auf

$$\sum_{k,l=1}^{n} g_{ik} x_{kl} (g^{-1})_{lj}$$

abbildet. Hier schreiben wir g_{ik} für die Einträge der Matrix g und $(g^{-1})_{lj}$ für die Einträge der Matrix g^{-1}. Wir berechnen für alle μ, ν nun das Bild der Matrix $\mathcal{W}^{(\mu,\nu)}$ mit Einträgen

$$(\mathcal{W}^{(\mu,\nu)})_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (\mu,\nu) = (k,l) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

unter der von $\big(\mathrm{TInt}(g)\big)_e$ induzierten Abbildung

$$\mathrm{TInt}(g) : \mathrm{Mat}_n(K) \to \mathrm{Mat}_n(K).$$

$\mathcal{W}^{(\mu,\nu)}$ entspricht der Derivation $\frac{\partial}{\partial x_{\mu\nu}}(e)$ auf $K[x_{ij,y}]/\big(\det(x_{ij})y - 1\big)$, wird also auf die Derivation

$$\begin{array}{rcl} K[x_{ij},y]/(\det(x_{ij})y - 1) & \to & K \\ x_{ij} & \mapsto & \frac{\partial}{\partial x_{\mu\nu}}\big(\sum\limits_{k,l=1}^{n} g_{ik} x_{kl} (g^{-1})_{lj}\big)(e) \end{array}$$

abgebildet. Wir berechnen leicht

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu\nu}}\big(\sum_{k,l=1}^{n} g_{ik} x_{kl} (g^{-1})_{lj}\big)(e) = g_{i\mu}(g^{-1})_{\nu j} = g_{i\mu}(g^{-1})_{\nu j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{ij}}(x_{ij})(e)$$

Andererseits ist $g\mathcal{W}^{(\mu,\nu)}g^{-1}$ die Matrix mit den Einträgen

$$\sum_{k,l=1}^{n} g_{ki}\mathcal{W}_{i,j}^{(\mu,\nu)}(g^{-1})_{j,k} = g_{i,\mu}(g^{-1})_{\nu j}$$

an der Stelle (i,j). Also bildet $\big(\mathrm{TInt}(g)\big)_e$ die Matrix $\mathcal{W}^{(\mu,\nu)}$ auf $g\mathcal{W}^{(\mu,\nu)}g^{-1}$ ab. Da $\big(\mathrm{TInt}(g)\big)_e$ eine $K-$lineare Abbildung ist, folgt unsere Behauptung. $\square$

Korollar 3.11 *Sei $G \subset GL_n(K)$ eine lineare algebraische Gruppe mit*

$$T_{G,e} \subset T_{GL_n(K),e} \simeq Mat_n(K).$$

Für jedes $g \in G$ vermittelt dann der Homomorphismus

$$\begin{array}{rcl} Int(g) : G & \to & G \\ h & \mapsto & g\ h\ g^{-1} \end{array}$$

die Abbildung

$$T_{G,e} \longrightarrow T_{G,e},$$

die durch Konjugation mit g auf dem Unterraum $T_{G,e}$ von $Mat_n(K)$ gegeben ist.

Beweis : Das folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} T_{G,e} \arrow[r, "\mathrm{TInt}(g)e"] \arrow[d, hook] & T_{G,e} \arrow[d, hook] \\ T_{GL_n(K),e} \arrow[r, "\mathrm{TInt}(g)e"'] & T_{GL_n(K),e} \end{tikzcd}$$

und aus Lemma 3.10. $\square$

Nun wenden wir folgenden Trick an: Für jedes $g \in G$ definiert $\mathrm{Tint}(g)_e$ eine $K-$lineare Abbildung

$$\big(\mathrm{TInt}(g)\big)_e : T_{G,e} \to T_{G,e}.$$

Nach Konstruktion der Tangentialabbildung gilt

$$\big(\mathrm{TInt}(g\ h)\big)_e = (\mathrm{Tint}g)_e\big(\mathrm{Tint}(h)\big)_e.$$

(Übungen)

Da $\mathrm{TInt}(g)_e$ die Identität ist, ist insbesondere jedes $\mathrm{TInt}(g)_e$ ein Isomorphismus. Ferner erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{Ad}{:}G \longrightarrow \mathrm{Aut}_K(T_{G,e}) = GL(T_{G,e})$$

von G in die Gruppe der Vektorraumautomorphismen von $T_{G,e}$.

Diesen Gruppenhomomorphismus nennt man auch die „adjungierte Darstellung“ von G.

Da $T_{G,e}$ als Untervektorraum von $\mathrm{Mat}_n(K)$ ein endlich-dimensionaler $K-$Vektorraum ist, ist $GL(T_{G,e})$ isomorph zu einem $GL_r(K)$, also insbesondere eine lineare algebraische Gruppe.

Für $G = GL_n(K)$ ist insbesondere

$$GL(T_{GL_n(K),E_n}) \simeq GL_{n^2}(K).$$

Hier schickt nach Lemma 3.10 die Abbildung

$$\mathrm{Ad} : GL_n(K) \longrightarrow \mathrm{Aut}_K(T_eG) \simeq GL_{n^2}(K)$$

eine Matrix $g \in GL_n(K)$ auf die $n^2 \times n^2-$Matrix, die die Konjugation

$$V \longmapsto gVg^{-1}$$

auf $\mathrm{Mat}_n(K) \simeq K^{n^2}$ beschreibt. Die Einträge dieser Matrix werden durch Polynome gegeben. Also ist Ad ein Homomorphismus linearer Algebraischer Gruppen!

Daraus folgt, dass auch für eine beliebige lineare algebraische Gruppe $G \subset GL_n(K)$ der Homomorphismus

$$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_K(T_{G,e}) =: \Gamma$$

ein Homomorphismus linearer algebraischer Gruppen ist.

Wir können also die Tangentialabbildung im Einselement e von G betrachten und erhalten eine lineare Abbildung

$$\mathrm{ad} := (T\mathrm{Ad})_e : T_{G,e} \to T_{\Gamma,e}$$

zwischen den Tangentialräumen. Diese wollen wir jetzt für $G = GL_n(K)$ berechnen. Dazu brauchen wir einige Vorbereitungen.

Lemma 3.12 *Es seien $f_1, \ldots, f_n \in K[x_1, \ldots, x_m]$ und*

$$\begin{array}{rcl} f : K^m & \longrightarrow & K^n \\ (a_1, \ldots, a_m) & \longmapsto & \big(f_1(a_1, \ldots, a_m), \ldots, f_n(a_1, \ldots, a_m)\big) \end{array}$$

sei die zugehörige Abbildung affiner algebraischer Mengen. Sei $a \in K^m$ mit $f(a) = b$. Nach Satz 3.3 hat $T_{K^m,a}$ die Basis $\frac{\partial}{\partial x_i}(a)(i = 1, \ldots, m)$ und $T_{K^n,b}$ die Basis $\frac{\partial}{\partial x_i}(b)(i = 1, \ldots, n)$. Bezüglich dieser Basen wird

$$(Tf)_a : T_{K^m,a} \to T_{K^n,b}$$

durch die $(n \times m)-$Matrix

$$Jf := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}$$

gegeben. Außerdem gilt

$$f(a + \epsilon v) = f(a) + J(f) \cdot v\epsilon.$$

Hier ist $a = (a_1, \ldots, a_m), v = (v_1, \ldots, v_m)$ und $J(f) \cdot v$ das Matrixprodukt.

Beweis : Definitionsgemäß wird

$$(Tf)_a : T_{K^m,a} \to T_{K^n,b}$$

durch $\partial \mapsto \partial \circ f^\#$ gegeben, wobei

$$\begin{array}{rcl} f^\# : K[x_1, \ldots, x_n] & \longrightarrow & K[x_1, \ldots, x_m] \\ x_i & \longmapsto & f_i(x_1, \ldots, x_m) \end{array}$$

die zugehörige Abbildung auf den Koordinatenringen ist. Also ist $(Tf)_a \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(a)\right)$ die Derivation

$$x_j \longmapsto \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a).$$

Somit hat $(Tf)_a$ die Koordinatenmatrix Jf. Außerdem ist

$$f(a + \epsilon v) = \big(f_1(a + \epsilon v), \ldots, f_n(a + \epsilon v)\big),$$

und nach Lemma 3.6 gilt

$$f(a + \epsilon v) = f(a) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix} (v_1, \ldots, v_m)\epsilon.$$

Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 3.13 *Es sei*

$$h : GL_m(K) \to GL_n(K)$$

ein Gruppenhomomorphismus, so dass es Polynome $f_1, \ldots, f_{n^2}, f_0$ in $m^2 + 1$ Variablen gibt, für die

$$\begin{array}{ccc} K^{m^2+1} & \xrightarrow{f=(f_1,\ldots,f_{n^2},f_0)} & K^{n^2+1} \\ \bigcup & & \bigcup \\ GL_m(K) & \xrightarrow[h]{} & GL_n(K) \end{array}$$

kommutiert. Dann identifizieren wir wie oben

$$T_{GL_m(K),E_n} \simeq \bigoplus_{i,j=1}^{m} K\frac{\partial}{\partial x_{ij}}(e) \subset T_{K^{n^2+1},e}$$

und

$$T_{GL_n(K),E_n} \simeq \bigoplus_{i,j=1}^{n} K\frac{\partial}{\partial x_{ij}}(e) \subset T_{K^{m^2+1},e}.$$

Die Tangentialabbildung

$$(Th)_{E_n} : T_{GL_m(K),E_m} \longrightarrow T_{GL_n(K),E_n}$$

hat dann bezüglich dieser Basen die Koordinatenmatrix $H \in K^{n^2 \times m^2}$, *für die*

$$h(E_n + \epsilon V) = E_n + \epsilon H(V)$$

gilt.

Beweis : Das folgt aus Lemma 3.12. □

Proposition 3.14 *Wir betrachten den Morphismus*

$$\begin{array}{rcl} inv : GL_n(K) & \to & GL_n(K) \\ A & \mapsto & A^{-1}. \end{array}$$

Dann ist $(Tinv)_{E_n} : T_{GL_n(K),E_n} \to T_{GL_n(K),E_n}$ *nach Identifikation von* $T_{GL_n(K),E_n}$ *mit* $Mat_n(K)$ *die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} Mat_n(K) & \to & Mat_n(K) \\ A & \mapsto & -A. \end{array}$$

Beweis : Nach Korollar 3.13 ist $(\mathrm{Tinv})_{E_n}$ durch die Koordinatenmatrix H mit

$$\mathrm{inv}(E_n + \epsilon V) = \mathrm{inv}(E_n) + \epsilon H(V)$$

gegeben. Also gilt

$$(E_n + \epsilon V)^{-1} = E_n + \epsilon H(V).$$

Nun ist

$$(E_n + \epsilon V)^{-1} = E_n - \epsilon V \text{ (Übungen)},$$

also ist tatsächlich $H(V) = -V$. □

Jetzt wollen wir für $G = GL_n(K)$ die Abbildung

$$\mathrm{ad} : T_{GL_n(K),e} \to T_{\Gamma,e}$$

mit $\Gamma = \mathrm{Aut}_K(T_{GL_n(K),e})$ berechnen. Dazu geben wir die Koordinatenmatrix bezüglich der üblichen Basen an. Identifizieren wir $T_{GL_n(K),e}$ mit $\mathrm{Mat}_n(K)$ bezüglich der Basis

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_{ij}}(e) : i, j = 1, \ldots, n \right\},$$

so ist $\Gamma \simeq \mathrm{Aut}_K(K^{n^2}) = GL_{n^2}(K)$ und $T_{\Gamma,e} \simeq \mathrm{Mat}_{n^2}(K)$.

Satz 3.15 *Die Abbildung*

$$ad : T_{GL_n(K),e} \to T_{\Gamma,e}$$

ist durch

$$\begin{array}{rcl} Mat_n(K) & \to & End\big(Mat_n(K)\big) \\ A & \mapsto & (B \mapsto [A, B]) = AB - BA \end{array}$$

gegeben. Sie wird also durch die Lieklammer gegeben.

Beweis : Wir berechnen zunächst für jedes $V \in \mathrm{Mat}_n(K)$ das Element $\mathrm{Ad}(E_n + \epsilon V)$ von End $(\mathrm{Mat}_n K[\epsilon])$. Nach Lemma 3.10 ist dies die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mat}_n K[\epsilon] & \to & \mathrm{Mat}_n K[\epsilon] \\ B & \mapsto & (E_n + \epsilon V)B(E_n - \epsilon V) \end{array}$$

Nun ist

$$\begin{array}{rl} & (E_n + \epsilon V)(B)(E_n - \epsilon V) \\ = & (B + \epsilon VB)(E_n - \epsilon V) \\ = & B - \epsilon BV + \epsilon VB \\ = & B + (VB - BV)\epsilon. \end{array}$$

Also gilt

$$\mathrm{Ad}(E_n + \epsilon V) = \mathrm{id} + [V, -]\epsilon,$$

woraus mit Korollar 3.13 unsere Behauptung folgt. $\square$

Korollar 3.16 *Für jede lineare algebraische Gruppe $G \subset GL_n(K)$ ist die Einschränkung von $[,]$ auf $T_{G,e} \subset T_{GL_n(K),E_n} \simeq Mat_n(K)$ eine Abbildung*

$$T_{G,e} \times T_{G,e} \to T_{G,e},$$

die $T_{G,e}$ zu einer Liealgebra macht. Wir schreiben

$$Lie(G) = (T_{G,e}, [,])$$

für diese Liealgebra. Für $x, y \in T_{G,e}$ gilt ferner

$$[x, y] = ad(x)(y).$$

Beweis : Für $G \subset GL_n(K)$ und $g \in G$ ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} G & \stackrel{\mathrm{Int}(g)}{\longrightarrow} & G \\ i \bigcap & & \bigcap i \\ GL_n(K) & \stackrel{\mathrm{Int}(g)}{\longrightarrow} & GL_n(K). \end{array}$$

Also kommutiert auch

$$\begin{tikzcd} T_eG \arrow[r, "\mathrm{Ad}_G(g)"] \arrow[d, hook, "(T_ei)"'] & T_eG \arrow[d, hook, "(T_ei)"] \\ T_{GL_n(K),e} \arrow[r, "\mathrm{Ad}_{GL_n}(g)"] & T_{GL_n(K),e}. \end{tikzcd}$$

Nach Korollar 3.13 und Proposition 3.14 ist

$$\mathrm{Ad}_{GL_n}(e + \epsilon V) = \mathrm{id} + \epsilon \mathrm{ad}_{GL_n}(V)$$

und

$$\mathrm{Ad}_G(e + \epsilon X) = \mathrm{id} + \epsilon \mathrm{ad}_G(X).$$

Aus der Kommutativität des Diagramms folgt daher für alle $X \in T_eG$:

$$\mathrm{ad}_{GL_n}\big(T_ei(X)\big)\Big|_{T_eG} = \mathrm{ad}_G(X).$$

Somit gilt für alle $X, Y \in T_eG$:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ad}_G(X)(Y) & = & \mathrm{ad}_{GL_n}\big(T_ei(X), T_ei(Y)\big). \\ & = & [T_ei(X), T_ei(Y)]. \end{array}$$

Somit vermittelt die Lieklammer auf $\mathrm{Mat}_n(K)$ tatsächlich durch Einschränken eine Abbildung

$$[\ ,\ ] : T_eG \times T_eG \to T_eG,$$

die $[X, Y] = \mathrm{ad}_G(X)(Y)$ erfüllt.

Die Eigenschaften einer Lieklammer aus Definition 3.1 vererben sich auf die Einschränkung von $[,]$ auf T_eG. Also wird T_eG mit dieser Verknüpfung tatsächlich eine Liealgebra. $\square$

Unser nächstes Ziel ist es, mit Hilfe der adjungierten Darstellung ein Wurzelsystem zu finden. Dazu brauchen wir zunächst einige Vorarbeiten.

4 Exkurs über Darstellungen

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Wir schreiben

$$GL(V) = \{f : V \to V \text{ Isomorphismus von } K-\text{Vektorräumen}\}.$$

Nach Wahl einer Basis von V ist $V \simeq K^n$ und $GL(V) \simeq GL_n(K)$.

Definition 4.1 *Sei G eine Gruppe. Eine Darstellung von G auf V ist ein Gruppenhomomorphismus*

$$\rho : G \to GL(V).$$

Die Darstellung heißt treu, falls ρ injektiv ist.

Definition 4.2 *Eine Darstellung ρ von G auf V heißt irreduzibel, wenn es keinen Untervektorraum W außer 0 und V gibt, so dass für jedes $g \in G$ die lineare Abbildung $\rho(g)$ den Unterraum W invariant lässt.*

Ein wichtiges Prinzip der Darstellungstheorie ist Schurs Lemma, das wir jetzt beweisen wollen.

Definition 4.3 *Sind $\rho : G \to GL(V)$ und $\rho' : G \to GL(V)'$ Darstellungen von G auf den $K-$Vektorräumen V und V', so heißt eine lineare Abbildung*

$$f : V \to V'$$

$G-$äquivariant bzgl. ρ und ρ', falls für alle $g \in G$ und $v \in V$

$$f\big(\rho(g) \cdot v\big) = \rho'(g) \cdot f(v)$$

gilt.

Satz 4.4 *(Lemma von Schur) Sei $K = \overline{K}$, also K algebraisch abgeschlossen. Gegeben seien zwei irreduzible Darstellungen*

$$\rho : G \to GL(V) \text{ und } \rho' : G \to GL(V')$$

der Gruppe G auf den Vektorräumen V und V' sowie eine $G-$äquivariante lineare Abbildung

$$f : V \to V'$$

im Sinne von Definition 4.3. Dann gilt:

i) Entweder ist f ein Isomorphismus oder $f = 0$.

ii) Falls $V = V'$ und $\rho = \rho'$, so ist f die Multiplikation mit einem Skalar aus K.

Beweis :

i) Der Unterraum Kern $(f) \subset V$ ist invariant unter allen $\rho(g)$ für $g \in G$, denn es gilt
$$f\big(\rho(g) \cdot v\big) = \rho'(g) f(v) = 0,$$
falls $v \in \text{Kern}(f)$.

Da ρ irreduzibel ist, folgt $\text{Kern}(f) = V$ oder $\text{Kern}(f) = 0$. Im ersten Fall ist $f = 0$. Im zweiten Fall ist f injektiv und bildet V isomorph auf $\text{Bild}(f) \subset V'$ ab. Nun ist $\text{Bild}(f)$ invariant unter allen $\rho'(g)$, denn für $f(v) \in \text{Bild}(f)$ gilt
$$\rho'(g)\big(f(v)\big) = f\big(\rho(g) \cdot v\big) \in \text{ Bild}(f).$$
Da ρ' irreduzibel ist, folgt Bild $(f) = 0$ oder Bild $(f) = V'$. Im ersten Fall ist $f = 0$, im zweiten Fall ist f ein Isomorphismus.

ii) Wir nehmen $V = V'$ und $\rho = \rho'$ an. Da K algebraisch abgeschlossen ist, existiert ein Eigenwert λ von f. Der Endomorphismus
$$\varphi = \lambda \text{id} - f$$
von V ist dann ebenfalls $G-$ äquivariant und sein Kern ist nicht Null, da er einen Eigenvektor von f enthält. Aus i) folgt also $\varphi = 0$, d.h.
$$\lambda \text{id} = f.$$
Also ist f die Multiplikation mit λ.

$\square$

Korollar 4.5 *Ist $K = \overline{K}$ und $\rho : G \to GL_n(K)$ eine irreduzible Darstellung von G und $A \in GL_n(K)$ eine Matrix, die mit allen $\rho(g)$ kommutiert. Dann ist*
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}$$
für ein $\lambda \in K$.

Beweis : Wir betrachten den Endomorphismus $f : K^n \to K^n$, der durch Multiplikation mit A gegeben ist. Da A mit allen $\rho(g)$ kommutiert, folgt für alle $v \in K^n$
$$f\big(\rho(g)\big)v = A \cdot \rho(g) \cdot v = \rho(g) \cdot A \cdot v = \rho(g)\big(f(v)\big),$$
daher ist f $G-$äquivariant.

Nach dem Lemma von Schur Satz 4.4 ii) ist f also die Multiplikation mit einem Skalar. $\square$

5 Unipotente und Borelgruppen

Es sei V ein endlich-dimensionaler $K-$Vektorraum und $GL(V)$ die Gruppe der $K-$linearen Automorphismen von V.

Definition 5.1 *i) $g \in GL(V)$ heißt halbeinfach, falls es eine Basis von V aus Eigenvektoren von g gibt.*

ii) $g \in Mat_n(K)$ heißt nilpotent, falls es ein $m \geqq 1$ mit $g^m = 0$ gibt.

iii) $g \in GL(V)$ heißt unipotent, falls $g - id_V$ nilpotent ist.

In der Linearen Algebra haben wir halbeinfache Automorphismen auch diagonalisierbar genannt. Ein $g \in GL(V)$ ist genau dann halbeinfach, wenn es eine Basis von V gibt, so dass die Koordinatenmatrix von g bezüglich dieser Basis Diagonalgestalt hat.

Erinnerung: In der Linearen Algebra zeigt man die Existenz der Jordan-Normalform für jedes $g \in GL(V)$: Es gibt eine Basis von V, so dass die Koordinatenmatrix von g bezüglich dieser Basis die folgende Gestalt hat:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 E_{m_1} + N_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 E_{m_2} + N_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_r E_{m_r} + N_r \end{pmatrix}.$$

Hier sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ die Eigenwerte von $g, \chi_g(X) = (X - \alpha_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_r)^{m_r}$ ist das charakteristische Polynom von g und $N_1, \ldots, N_r$ sind nilpotente Matrizen. Diese Matrix lässt sich schreiben als Produkt

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 E_{m_1} & & & 0 \\ & \alpha_2 E_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_r E_{m_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{m_1} + \frac{1}{\alpha_1} N_1 & & & 0 \\ & E_{m_2} + \frac{1}{\alpha_2} N_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & E_{m_r} + \frac{1}{\alpha_r} N_r \end{pmatrix}.$$

Daher ist jedes $g \in GL(V)$ das Produkt eines halbeinfachen und eines nilpotenten Elements aus $GL(V)$.

Lemma 5.2 *Es sei $S \subset Mat_n(K)$ eine Menge von paarweise kommutierenden $(n \times n)-$Matrizen über K, d.h. für alle $A, B \in S$ gilt $AB = BA$.*

i) Es gibt ein $g \in GL_n(K)$, so dass $gSg^{-1} = \{gAg^{-1} : A \in S\}$ in der Menge der oberen Dreiecksmatrizen aus $Mat_n(K)$ enthalten ist.

Für $S \subset GL_n(K)$ ist also $gSg^{-1} \subset B_n$.

ii) Falls alle $A \in S$ halbeinfach sind, dann existiert ein $g \in GL_n(K)$, so dass

$$gSg^{-1} = \{gAg^{-1} : A \in S\}$$

in der Menge der Diagonalmatrizen aus $Mat_n(K)$ enthalten sind. Für $S \subset GL_n(K)$ ist also $gSg^{-1} \subset T_n$.

Beweis :

i) Mit Induktion nach n. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Also nehmen wir an, die Behauptung stimmt für $m < n$. Falls jedes $A \in S$ ein Vielfaches von E_n ist, ist die Behauptung klar. Also nehmen wir an, dass es ein $A \in S$ gibt, so dass A kein Vielfaches von E_n ist. Da K algebraisch abgeschlossen ist, besitzt A einen Eigenraum

$$E_\lambda(A) = \{v \in K^n : Av = \lambda v\}$$

mit $0 < \dim E_\lambda(A) < n$ für ein $\lambda \neq 0$ in K.

Für jedes $B \in S$ und $v \in E_\lambda(A)$ gilt

$$\lambda Bv = B(\lambda v) = B(Av) = A(Bv),$$

daher liegt auch Bv in $E_\lambda(A)$. Somit vermittelt S durch Einschränken auf den Unterraum $E_\lambda(A)$ eine Familie kommutierender Endomorphismen S' von $E_\lambda(A)$.

Da $\dim E_\lambda(A) < n$ ist, können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden: Es gibt ein $h \in Aut\big(E_\lambda(A)\big)$, so dass $hS'h^{-1}$ aus oberen Dreiecksmatrizen besteht. Insbesondere existiert ein $v \in E_\lambda(A)$, sodass v ein Eigenvektor aller $B \in S$ ist. Jetzt betrachten wir den Quotientenraum $W = K^n/\langle v\rangle$.

Jedes $B \in S$ vermittelt einen Endomorphismus $\overline{B}$ von W. Wir können die Induktionsvoraussetzung auf W anwenden und erhalten ein $g_0 \in Aut(W)$, so dass jedes $g_0\overline{B}g_0^{-1}$ eine obere Dreiecksmatriz ist. Es gibt also eine Basis $\overline{v}_2, \ldots \overline{v}_n$ von W, so dass die Koordinatenmatrix jedes $\overline{B}$ eine obere Dreiecksmatriz ist. Wir wählen beliebige Urbilder $v_2, \ldots, v_n$ von $\overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ in V und ergänzen diese zu einer Basis

$$v_1 = v, v_2, \ldots, v_n$$

von V. Dann ist

$$B(v_1) \in \langle v_1\rangle$$

für jedes $B \in S$ und

$$B(v_i) \in \langle v_1, \ldots, v_i\rangle$$

für $i \geqq 1$. Also leistet die lineare Abbildung g, die die kanonischen Einheitsvektoren e_i auf v_i abbildet, das Verlangte.

ii) Wir führen wieder Induktion nach n und können annehmen, dass die Behauptung für alle $m < n$ gilt. Falls jedes $A \in S$ Vielfaches von E_n ist, ist nichts zu zeigen. Ansonsten gibt es ein $A \in S$ mit einer Eigenraumzerlegung

$$K^n = E_{\lambda_1}(A) \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_r}(A),$$

die $0 < \dim E_{\lambda_i}(A) < \dim V$ erfüllt. Wie im Beweis von i) zeigt man, dass alle $E_{\lambda_i}(A)$ invariant unter allen $B \in S$ sind. Nach Induktionsvoraussetzung hat also jedes $E_{\lambda_i}(A)$ eine Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren aller $B \in S$. So erhalten wir eine Basis von V aus gemeinsamen Eigenvektoren aller $B \in S$.

□

Wir beweisen jetzt den Satz von Lie-Kolchin für unipotente Matrizen:

Satz 5.3 *(Satz von Lie-Kolchin) Es sei $G \subset GL_n(K)$ eine Untergruppe, die nur aus unipotenten Matrizen besteht. Dann gibt es ein $g \in GL_n(K)$ mit*

$$gGg^{-1} \subset U_n.$$

Mit anderen Worten: Es gibt eine Basis von K^n, bezüglich derer jede lineare Abbildung aus G obere Dreiecksgestalt hat mit Einsen auf der Hauptdiagonale.

Dieser Satz gilt für beliebige Untergruppen von $GL_n(K)$, nicht nur für lineare algebraische Gruppen.

Beweis : Wir führen Induktion nach n und können annehmen, dass die Behauptung für alle $m < n$ gilt. Es genügt zu zeigen, dass ein $v \in K^n$ existiert, so dass $gv = v$ für alle $g \in G$ gilt. Dann wendet man wie im Beweis von Lemma 5.2 i) die Induktionsvoraussetzung auf den Quotientenraum $K^n/\langle v\rangle$ an und erhält die Behauptung. Wir können annehmen, dass

$$i : G \to GL_n(K)$$

eine irreduzible Darstellung ist. Sonst folgt die Behauptung durch Anwenden der Induktionsvoraussetzung auf einen invarianten Unterraum.

Wir zeigen nun, dass diese irreduzible Darstellung i die Abbildung $i(g) = E_n$ sein muss, woraus wegen der Irreduzibilität $n = 1$ und die Existenz eines invarianten Vektors folgt. Dazu nehmen wir an, es gibt ein $g_0 \in G$ mit $(g_0 - E_n) \neq 0$. Für jedes $h \in G$ gilt dann

$$\begin{aligned} \mathrm{Spur}\big(h(g_0 - E_n)\big) &= \mathrm{Spur}(hg_0) - \mathrm{Spur}(h) \\ &= 0, \end{aligned}$$

denn hg_0 und h sind als Elemente von G unipotent und jede unipotente Matrix in $GL_n(K)$ hat die Spur n (Übungen).

Also ist

$$g_0 - E_n \in \{f \in Mat_n(K) : \mathrm{Spur}(g_0 f) = 0 \text{ für alle } g \in G\} =: U.$$

Somit ist $U \neq 0$ ein Unterraum von $Mat_n(K)$. Wir definieren eine Darstellung von G auf U durch

$$\begin{array}{rcl} \rho : G & \longrightarrow & GL(U) \\ g & \longmapsto & (f \mapsto gf). \end{array}$$

Man rechnet leicht nach, dass für $g \in G$ und $f \in U$ auch gf in U ist und dass ρ ein Homomorphismus ist.

Es sei $0 \subsetneqq W \subset U$ ein bezüglich Inklusion minimaler nicht-trivialer $G-$invarianter Unterraum. Dann ist die Darstellung

$$\begin{array}{rcl} \rho_W : G & \longrightarrow & GL(W) \\ g & \longmapsto & \rho(g)|_W \end{array}$$

irreduzibel. Nun ist für jedes $v \in K^n$ die lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} F_v : W & \longrightarrow & K^n \\ f & \longmapsto & f(v) \end{array}$$

$G-$äquivariant bezüglich der Darstellungen $\rho_W : G \to GL(W)$ und $i : G \to GL_n(K)$, denn es gilt

$$\begin{array}{rcl} F_v\big(\rho(g)(f)\big) & = & F_v(gf) \\ & = & (gf)(v) \\ & = & g\big(f(v)\big) \\ & = & i(g)\big(F_v(f)\big). \end{array}$$

Nach dem Lemma von Schur (Satz 4.4) ist also $F_v = 0$ oder F_v ein Isomorphismus. Da $W \neq 0$ ist, existiert ein $f \neq 0$ in W, daher finden wir ein $0 \neq v \in K^n$ mit $F_v(f) = f(v) \neq 0$. Also ist F_v ein Isomorphismus. Für jedes $u \in K^n$ ist dann

$$F_v^{-1} \circ F_u : W \to W$$

ein Endomorphismus. Da für alle $f \in W$

$$\begin{array}{rrcl} & F_v \circ \rho(g)(f) & = & i(g)F_v(f) \\ \text{und} & F_u \circ \rho(g)(f) & = & i(g)F_u(f) \end{array}$$

gilt, folgt

$$F_v^{-1} \circ F_u \circ \rho(g) = \rho(g) \circ F_v^{-1} \circ F_u$$

für alle $g \in G$. (ÜA)

Aus Korollar 4.5 folgt also, dass

$$F_v^{-1} \circ F_u$$

die Multiplikation mit einer Konstante $\lambda(u)$ ist. Da $F_v : W \to K^n$ ein Isomorphismus ist, existiert ein $f \in W$ mit

$$F_v(f) = f(v) = v.$$

Für jedes $u \in K^n$ folgt

$$f(u) = F_u(f) = \lambda(u)F_v(f) = \lambda(u)v.$$

Ergänzen wir v zu einer Basis von K^n, so hat also f eine Koordinatenmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist $\mathrm{Spur}(f) = 1$. Aber f ist ein Element von $W \subset U$, hat also die Eigenschaft

$$\mathrm{Spur}(f) = 0,$$

da $1 \in G$ ist. Das ist ein Widerspruch. Also ist unsere Annahme falsch und die Behauptung bewiesen. □

Definition 5.4 *Eine Gruppe G heißt auflösbar, falls es eine Kette von Untergruppen*

$$1 = G_n \subset G_{n-1} \subset \ldots \subset G_1 \subset G$$

gibt, so dass für alle $i = 1, \ldots, n-1$ G_{i+1} ein Normalteiler in G_i und G_i/G_{i+1} eine abelsche Gruppe ist.

Trvialerweise sind also abelsche Gruppen auflösbar. Für jede Gruppe G schreiben wir $[G, G]$ für die kleinste Untergruppe von G, die alle $ghg^{-1}h^{-1}$ für $g, h \in G$ enthält. $[G, G]$ heißt Kommutatoruntergruppe von G. Induktiv definieren wir die iterierten Kommutatoren als

$$D^0(G) = G$$
$$D^{i+1}(G) = [D^iG, D^iG].$$

Dann gilt: G ist auflösbar, genau dann, wenn es ein $n \geqq 1$ mit $D^nG = 0$ gibt (Übungen).

Beispiel: U_n und B_n sind auflösbar.

Definition 5.5 *Für jedes $i \neq j$ in $\{1, \ldots, n\}$ definieren wir U_{ij} als die Menge aller Matrizen in $GL_n(K)$, die auf der Hauptdiagonale Einsen und ansonsten höchstens in der Position (i, j) einen Eintrag ungleich 0 haben. Für $a \in K$ schreiben wir $u_{ij}(a)$ für die Matrix in U_{ij}, die an der Stelle (i, j) den Eintrag a hat.*

U_{ij} ist eine Untergruppe von $GL_n(K)$, die vermöge $a \mapsto u_{ij}(a)$ isomorph zur Gruppe $(K, +)$ ist.

Wir wissen aus der linearen Algebra, dass die Multiplikation mit $u_{ij}(a) \in U_{ij}$ von links die $i-$te Zeile einer Matrix durch

$$i - \text{te Zeile} + a(j - \text{te Zeile})$$

ersetzt.

Ferner bewirkt die Multiplikation mit einer Permutationsmatrix von links eine Permutation der Zeilen. Die Gruppe der Permutationsmatrizen ist isomorph zur Gruppe S_n. Sie heißt auch Weylgruppe von $GL_n(K)$.

Wir wollen als nächstes die sogenannte Bruhatzerlegung von $GL_n(K)$ zeigen.

Lemma 5.6 *Jede Matrix g in $GL_n(K)$ lässt sich schreiben als*

$$g = b_1 w b_2$$

mit $b_1, b_2 \in B_n$ und einer Permutationsmatrix w.

Beweis : Wir multiplizieren g^{-1} mit Matrizen $u \in U_{ij}$ für $i < j$ von links, um so Einträge zu Null zu machen. Dies können wir so lange fortführen, bis in jeder Zeile die Anzahl der Nullen, mit denen die Zeile beginnt, eine andere Zahl ist. Sollte es nämlich zwei Zeilen geben, deren erster nicht-verschwindender Eintrag in derselben Position steht, so kann man diesen Eintrag in der oberen Zeile durch eine Multiplikation mit $u \in U_{ij}$ für $i < j$ zu Null machen.

Also gibt es ein $b_2 \in B_n$, so dass $b_2 g^{-1}$ eine Matrix ist, für die es eine Zeilenpermutation gibt, nach der sie eine obere Dreiecksmatrix wird. Also gibt es eine Permutationsmatrix w mit

$$w b_2 g^{-1} \in B_n,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Satz 5.7 *(Bruhatzerlegung)*

$GL_n(K)$ ist die disjunkte Vereinigung über die Doppelnebenklassen

$$B_n w B_n$$

für alle Permutationsmatrizen w, d.h. es gilt

$$G = \dot{\bigcup_{w \in S_n}} B_n w B_n.$$

Beweis : Wir haben im Lemma 5.6 gesehen, dass jedes $g \in G$ in einer Doppelnebenklasse $B_n w B_n$ liegt.

Wir zeigen nun, dass diese Doppelnebenklassen disjunkt sind.

Falls nämlich für $b_1, b_2, b_1', b_2' \in B_n$ und Permutationsmatrizen w, w' gilt

$$b_1 w b_2 = b_1' w' b_2',$$

so folgt

$$(b_1'^{-1} b_1) = w'(b_2' b_2^{-1}) w^{-1}$$

Entspricht w' der Permutation σ' und w der Permutation σ, so ist

$$w'(b_2' b_2^{-1}) w^{-1}(e_i) = w'(b_2' b_2^{-1}) e_{\sigma^{-1}(i)}.$$

In der Zeile $\sigma' \circ \sigma^{-1}(i)$ hat dieser Vektor einen Eintrag der Diagonale von $b_2' b_2^{-1}$. Dieser ist ungleich 0. Daher ist $\sigma' \circ \sigma^{-1}(i) \leqq i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, woraus $\sigma' = \sigma$, also $w = w'$ folgt. □

Definition 5.8 *Eine Flagge (F) in K^n ist eine Kette von Unterräumen*

$$(F) : 0 \subsetneqq W_1 \subsetneqq W_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq W_r = K^n,$$

von K^n. Wir nennen eine solche Flagge vollständig, falls $r = n$ und

$$\dim W_i = i$$

für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt.

Die Gruppe B_n der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen ist der Stabilisator der vollständigen Flagge

$$(F) : 0 \subsetneqq \langle e_1 \rangle \subsetneqq \langle e_1, e_2 \rangle \subsetneqq \ldots \subsetneqq K^n.$$

Es gilt also

$$B_n = \{g \in GL_n(K) : g\langle e_1, \ldots, e_i \rangle = \langle e_1, \ldots, e_i \rangle \text{ für alle } i = 1, \ldots, n\}$$

Für jedes $g \in GL_n(K)$ und jede Flagge

$$(F) : 0 \subsetneqq W_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq W_r = K^n$$

in K^n schreiben wir kurz (gF) für die Flagge

$$(gF) : 0 \subsetneqq gW_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq gW_r = K^n.$$

Die Untergruppe $\{g \in GL_n(K) : (gF) = (F)\}$ nennen wir den Stabilisator von (F).

Proposition 5.9 *Gegeben sei eine Folge positiver ganzer Zahlen*

$$0 < d_1 < d_2 < \ldots < d_r = n.$$

i) $GL_n(K)$ *operiert transitiv auf der Menge aller Flaggen*

$$0 \subsetneqq W_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq W_r = K^n$$

mit $\dim W_i = d_i$ *für alle* i.

ii) Die Stabilisatoren zweier Flaggen wie in i) *sind konjugiert.*

Beweis :

i) Es seien

$$0 \subsetneqq W_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq W_r = K^n$$

und $0 \subsetneqq W_1' \subsetneqq \ldots \subsetneqq W_r' = K^n$ zwei Flaggen mit gleicher Dimensionsfolge. Dann wählen wir eine Basis von W_1, ergänzen sie zu einer Basis von W_2, usw. Analog wählen wir eine Basis von W_1', ergänzen sie zu einer Basis von W_2' usw. Es gibt ein $g \in GL_n(K)$, das die erste Basis auf die zweite abbildet. Dieses leistet das Verlangte.

ii) Ist $(F') = (gF)$, so folgt

$$\{h \in GL_n(K) : (hF') = (F')\} = g\{h \in GL_n(K) : (hF) = (F)\}g^{-1}.$$

□

Definition 5.10 *i) Eine Untergruppe von* $GL_n(K)$ *heißt Borelgruppe, falls sie der Stabilisator einer maximalen Flagge ist.*

ii) Eine Untergruppe von $GL_n(K)$ *heißt Parabolische, falls sie der Stabilisator einer beliebigen Flagge ist.*

Nach Proposition 5.9 sind je zwei Borelgruppen zueinander konjugiert. Da B_n eine Borelgruppe ist, sind die Borelgruppen in $GL_n(K)$ genau die Untergruppen

$$gB_ng^{-1}$$

für $g \in GL_n(K)$.

Satz 5.11 *Jede Untergruppe* H *von* $GL_n(K)$, *die eine Borelgruppe enthält, ist eine Parabolische.*

Beweis : Wir können nach Proposition 5.9 annehmen, dass $B_n \subset H$ gilt. Wir betrachten einen linearen Unterraum W mit $H \subset \{g \in GL_n(K) : gW = W\}$. Dann stabilisiert auch B_n diesen Unterraum. Sei $i \leqq n$ minimal mit $W \subset \langle e_1, \ldots, e_i \rangle$. Dann existiert ein $w \in W$ mit $w = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_i e_i$ und $\alpha_i \neq 0$. Nun ist

$$u_{ji}(1) \in U_{ji} \subset B_n$$

für alle $j < i$, also enthält W auch den Vektor

$$u_{ji}(1) \cdot w - w = \alpha_i e_j$$

für alle $j < i$. Daher enthält W die Vektoren $e_1, \ldots, e_{i-1}$ und w, also folgt

$$w = \langle e_1, \ldots, e_i \rangle.$$

Jeder Unterraum, der von H invariant gelassen wird, ist also von der Form $\langle e_1, \ldots, e_i \rangle$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es seien

$$0 \subsetneqq W_{d_1} \subsetneqq W_{d_2} \ldots \subsetneqq W_{d_r} = K^n$$

alle Unterräume, die von H invariant gelassen werden, wobei $W_{d_k} = \langle e_1, \ldots, e_{d_k} \rangle$ gilt. Es sei P der Stabilisator dieser Flagge. Definitionsgemäß ist P eine Parabolische, die H enthält.

Wir betrachten den Unterraum

$$\langle he_1 : h \in H \rangle,$$

der von allen he_1 erzeugt wird. Dies ist der minimale $H-$invariante Unterraum $\neq 0$. Also gilt $\langle he_1 : h \in H \rangle = W_{d_1}$. Wir schreiben kurz $d = d_1$. Also gibt es ein $h \in H$ mit

$$he_1 = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_d e_d$$

mit $\alpha_d \neq 0$. Nach der Bruhat Zerlegung (Satz 5.7) ist

$$h = b_1 w b_2 \in B_n w B_n$$

für eine Permuatationsmatrix w. Also folgt

$$w = b_1^{-1}\ h\ b_2^{-1} \in H,$$

denn es gilt $B_n \subset H$. Es folgt $we_1 = b_1^{-1}\ h\ b_2^{-1} e_1$, daher hat we_1 einen Eintrag $\neq 0$ in der Zeile d. Da w eine Permutationsmatrix ist, folgt

$$w(e_1) = e_d.$$

Ist $w^{-1}(e_1) = e_j$, so folgt

$$u_{d1}(1) = w u_{1j}(1) w^{-1} \in H.$$

Nun ist für alle $i > 1$ und alle $a \in K$

$$[u_{d1}(1), u_{1i}(a)] = u_{di}(a) \in H,$$

woraus auch

$$[u_{ld}(1), u_{di}(a)] = u_{li}(a) \in H$$

für alle $l < d$ folgt.

Daher enthält H die Untergruppen U_{li} für $i > 1$ und $l < d$. Daher enthält H alle Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

wobei A eine invertierbare $(d \times d)-$Matrix, B eine beliebige $d \times (u-d)-$Matrix und C eine invertierbare $(u-d) \times (u-d)$ obere Dreiecksmatrix ist.

Jetzt wenden wir dasselbe Verfahren nacheinander auf die Unterräume $W_{d_2}, \ldots, W_{d_r}$ an. Es folgt

$$H = P.$$

$\square$

Jetzt wollen wir zeigen, dass B_n eine maximal auflösbare Untergruppe von $GL_n(K)$ ist.

Lemma 5.12 *$GL_n(K)$ ist nicht auflösbar für $n \geqq 2$.*

Beweis : Da $SL_2(K) \subset GL_n(K)$ vermöge $A \mapsto \begin{pmatrix} A & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, reicht es nach dem Kriterium der verschwindenden Kommutatorreihe aus, zu zeigen, dass $SL_2(K)$ nicht auflösbar ist.

Die Gruppe $[SL_2(K), SL_2(K)]$ enthält die Elemente

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} s & s^{-1}a \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s^{-1} & -as \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -as^2 + a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also folgt $U_{12} \subset [SL_2(K), SL_2(K)]$. Die transponierte Gruppe ist der Kommutator der transponierten Matrizen, also folgt auch $U_{21} \subset [SL_2(K), SL_2(K)]$.

Ferner ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\in [SL_2(K), SL_2(K)]$ und es gilt

$$\begin{aligned}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & s^{-1} \\ -s & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -s \\ s^{-1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s^{-2} & 0 \\ 0 & s^2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

also liegen auch alle Diagonalmatrizen in $[SL_2(K), SL_2(K)]$, denn K ist algebraisch abgeschlossen.

Damit folgt $SL_2(K) = [SL_2(K), SL_2(K)]$, denn jede Matrix in $SL_2(K)$ kann man als ein Produkt von Diagonalmatrizen, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und Elementen aus U_{12} und U_{21} schreiben. □

Satz 5.13 *B_n ist eine maximale auflösbare Untergruppe von $GL_n(K)$. Mit anderen Worten: Jede Untergruppe $P \supsetneqq B_n$ ist nicht auflösbar.*

Beweis : Nach Satz 5.11 ist jede Untergruppe $P \supset B_n$ der Stabilisator einer Flagge $0 \subsetneqq W_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq W_r = K^n$.

Im Beweis von Satz 5.11 haben wir auch gesehen, dass $W_i = \langle e_1, \ldots, e_{k_i}\rangle$ für alle $i = 1, \ldots, r$ gilt. Falls $P \neq B_n$ ist, so hat mindestens ein Quotient W_{i+1}/W_i eine Dimension $\geqq 2$. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : P \to GL(W_1) \times GL(W_2/W_1) \times \ldots \times GL(W_r/W_{r-1}),$$

die durch die Einschränkungen $\varphi\,|_{W_i}$ gegeben wird. Da $\varphi(W_i) = W_i$ und $\varphi(W_{i+1}) = W_{i+1}$, vermittelt $\varphi\,|_{W_i+1}$ einen Automorphismus des Quotientenraums W_{i+1}/W_i.

Offenbar ist φ ein Gruppenhomomorphismus, der surjektiv ist. Also ist

$$P/_{\text{Kern }\varphi} \xrightarrow{\sim} GL(W_1) \times GL(W_2/W_1) \times \ldots \times GL(W_r/W_{r-1}).$$

Da auf der rechten Seite mindestens einer der Faktoren isomorph zu $GL_m(K)$ für ein $m \geqq 2$ ist, ist die Gruppe $P/\text{Kern }\varphi$ nicht auflösbar. Dann ist aber auch P nicht auflösbar, wie man mit Hilfe des Kommutatorkriteriums sieht. □

Jetzt betrachten wir noch einmal die adjungierte Darstellung der Gruppe $GL_n(K)$. Es sei $\mathfrak{g} = \mathrm{Mat}_n(K)$ die Liealgebra von $GL_n(K)$. Dann ist

$$\mathrm{Ad}\colon GL_n(K) \to \mathrm{Aut}\ (\mathfrak{g})$$

die Abbildung

$$g \mapsto (A \mapsto gAg^{-1})$$

nach Lemma 3.10.

Die Untergruppe $T_n \subset GL_n(K)$ ist abelsch und besteht nur aus halbeinfachen (diagonalisierbaren) Elementen. Also gibt es nach Lemma 5.2 eine Basis $w_1, \ldots, w_{n^2}$ von $\mathfrak{g} = \mathrm{Mat}_n(K)$, so dass jedes $\mathrm{Ad}(t)$ für $t \in T_n$ Diagonalgestalt bezüglich dieser Basis hat. Es ist also

$$\mathrm{Ad}(t)w_i = \alpha_i(t)w_i$$

für ein $\alpha_i(t) \in K^\times$. Da Ad ein Gruppenhomomorphismus ist, folgt

$$\alpha_i(t_1t_2) = \alpha_i(t_1)\alpha_i(t_2),$$

d.h. $\alpha_i : T_n \longrightarrow K^\times$ ist ein Gruppenhomomorphismus, also ein Charakter von T_n (siehe Definition 2.17). Wir wollen diese Charaktere nun bestimmen.

Lemma 5.14 *Sei $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g} = Mat_n(K)$ der Unterraum der Diagonalmatrizen mit Einträgen in K. Dann ist*

$$\mathfrak{t} = \{A \in \mathfrak{g} : Ad(t)A = E_{n^2} \text{ für alle } t \in T\} = Kern\ Ad$$

Beweis : Es gilt $\mathrm{Ad}(t)A = E_{n^2} \Leftrightarrow tAt^{-1} = E_{n^2}$. Für $t = \mathrm{diag}(t_1 \ldots t_n)$ und $A = (a_{ij})_{i,j}$ hat tAt^{-1} die Einträge $t_i a_{ij} t_j^{-1}$ an der Stelle (i, j).

Also ist $t_i a_{ij} t_j^{-1} = E_{n^2}$ für beliebige t genau dann, wenn für alle $i \neq j$ der Eintrag $a_{ij} = 0$ ist. □

Lemma 5.15 *Sei $i \neq j$ und $\mathfrak{g}_{ij} \subset \mathfrak{g} = Mat_n(K)$ der Unterraum der Matrizen, die höchstens an der Stelle (i, j) einen Eintrag $\neq 0$ haben. Dann gilt für alle $t \in T_n$ und $A \in \mathfrak{g}_{ij}$*

$$Ad(t)A = a_{ij}(t)A,$$

wobei $a_{ij} : T_n \longrightarrow K^\times$ der Charakter

$$diag(t_1, \ldots, t_n) \mapsto t_i t_j^{-1}$$

ist.

Beweis : Ist $A \in \mathfrak{g}_{ij}$ eine Matrix, die höchstens an der Stelle (i, j) einen Eintrag $\neq 0$ hat und sonst nur aus Nullen besteht, so gilt für $t = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n) \in T_n$:

$$tAt^{-1} = t_i t_j^{-1} A,$$

also folgt die Behauptung. □

Die Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{i \neq j} \mathfrak{g}_{ij}$$

ist also die Zerlegung von $\mathfrak{g}$ in gemeinsame Eigenräume von T_n. Die zugehörigen Charaktere, die die Eigenwerte geben, sind der triviale Charakter sowie die Charaktere a_{ij} für $i \neq j$.

Die Struktur dieser Charaktere wird deutlicher, wenn wir den Kern der adjungierten Darstellung auf G herausteilen. Es ist Kern (Ad)$= Z(G) = \{\text{diag}(s, \ldots, s) : s \in K^\times\}$.

Lemma 5.16 *Der surjektive Gruppenhomomorphismus $T_n \xrightarrow{q} T_n/Z(G)$ induziert einen injektiven Gruppenhomomorphismus $X^*\big(T_n/Z(G)\big) \to X^*(T_n) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}a_i$, wobei $a_i : T_n \to K^\times$ der Charakter diag $(t_1, \ldots, t_n) = t_i$ ist.*

Das Bild von $X^*\big(T_n/Z(G)\big)$ in $X^*(T_n) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}(a_i)$ ist die Untergruppe

$$\Big\{ \sum_{i=1}^{n} m_i a_i : \sum_{i=1}^{n} m_i = 0 \Big\}.$$

Beweis : Der Homomorphismus

$$i : X^*\big(T_n/Z(G)\big) \to X^*(T_n)$$

wird durch die Komposition eines Charakters $T_n/Z(G) \to K^\times$ mit der Quotientenabbildung q gegeben. Es seien α und β zwei Charaktere auf $T_n/Z(G)$ mit $i(\alpha) = i(\beta)$. Da q surjektiv ist, folgt $\alpha = \beta$. Da das Bild $i(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} a_i^{m_i}$ auf $Z(G)$ verschwindet, folgt für alle $s \in K^x$

$$i(\alpha) \text{ diag}(s, \ldots, s) = \prod_{i=1}^{n} s^{m_i} = 1,$$

woraus $\sum_{i=1}^{n} m_i = 0$ folgt. Ist umgekehrt $\gamma = \prod_{i=1}^{n} a_i^{m_i}$ ein Charakter von T_n mit $\sum_{i=1}^{n} m_i = 0$, so verschwindet γ auf $Z(G)$, faktorisiert also durch einen Charakter $\alpha : T_n/Z(G) \to K^\times$. Daher gilt $i(\alpha) = \gamma$. $\square$

Wir betrachten nun die von Ad $|_{T_n}$ induzierte Darstellung

$$T_n/Z(G) \longrightarrow GL(\mathfrak{g}).$$

Dann ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{i \neq j} \mathfrak{g}_{ij}$ eine Zerlegung in gemeinsame Eigenräume von $T_n/Z(G)$. Die nichttrivialen Charaktere von $T_n/Z(G)$, die als Eigenwerte auftauchen, sind genau die

$$a_{ij} \text{ für } i \neq j$$

in $X^*\big(T_n/Z(G)\big) = \Big\{\sum\limits_{i=1}^n m_i a_i : m_i \in \mathbb{Z} \text{ mit } \sum\limits_{i=1}^n m_i = 0\Big\}$. Der von $X^*\big(T_n/Z(G)\big)$ aufgespannte reelle Vektorraum ist

$$X^*\big(T_n/Z(G)\big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \Big\{\sum_{i=1}^n m_i a_i : m_i \in \mathbb{R} \text{ mit } \sum_{i=1}^n m_i = 0\Big\}.$$

In diesem Vektorraum, ausgestattet mit der Einschränkung des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$, ist die Menge

$$\Phi = \{a_{ij} = a_i - a_j : i \neq j\}$$

ein Wurzelsystem vom Typ A_{n-1}.

6 Der allgemeine Fall

Wir betrachten nun eine beliebige lineare algebraische Gruppe G und verallgemeinern (ohne Beweis) einige der Ergebnisse, die wir für GL_n kennengelernt haben. Der Grundkörper K ist wie immer algebraisch abgeschlossen.

Definition 6.1 *i) Die maximale Zariski-abgeschlossene, zusammenhängende, normale, auflösbare Untergruppe von G heißt Radikal von G und wird mit $rad(G)$ bezeichnet.*

ii) Die maximale Zariski-abgeschlossene, zusammenhängende, normale, unipotente Untergruppe von G heißt unipotentes Radikal von G und wird mit $rad_n(G)$ bezeichnet.

Man kann in beiden Fällen zeigen, dass es tatsächlich nur eine bezüglich Inklusion maximale Untergruppe mit den angegebenen Eigenschaften gibt.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 1)\ \mathrm{rad}\,\big(SL_n(K)\big) &= \{1\} \text{ und} \\ \mathrm{rad}\,\big(GL_n(K)\big) &= Z\big(GL_n(K)\big) \\[1em] 2)\ \mathrm{rad}_u\big(GL_n(K)\big) &= \{1\} \text{ und} \\ \mathrm{rad}_u(B_n) &= U_n. \end{aligned}$$

Definition 6.2 *Eine lineare algebraische Gruppe G heißt reduktiv, falls $rad_u G = \{1\}$ ist, und halbeinfach, falls $rad(G) = \{1\}$ ist.*

$GL_n(K)$ ist also eine reduktive Gruppe, $SL_n(K)$ eine halbeinfache Gruppe. B_n ist nicht reduktiv.

Definition 6.3 *Eine Zariski-abgeschlossene Untergruppe $D \subset G$, die isomorph zu T_n für ein $n \geqq 1$ ist, heißt Torus.*

Beispiel: In der Gruppe

$S_{P_4} = \{A \in GL_4(K) : A^t J A = J\}$ für $J = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{pmatrix}$ ist

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & t_1^{-1} & \\ & & & t_2^{-1} \end{pmatrix} : t_i \in K \right\}$$

ein Torus. Dieser Torus ist maximal, d.h. er ist nicht in einem echt größeren Torus enthalten.

Definition 6.4 *Eine Borelgruppe in G ist eine maximale Zariski-abgeschlossene, zusammenhängende, auflösbare Untergruppe.*

Beispiel: Nach Satz 5.13 ist B_n eine Borelgruppe in $GL_n(K)$ im Sinne der allgemeinen Definition 6.4.

Tatsache:

i) In G sind je zwei maximale Tori D_1 und D_2 konjugiert, d.h. es gibt ein $g \in G$ mit $gD_1g^{-1} = D_2$.

ii) In G sind je zwei Borelgruppen konjugiert.

Also passt die allgemeine Definition 6.4 mit unserer Definition 5.10 einer Borelgruppe in $GL_n(K)$ zusammen.

Definition 6.5 *Es sei $T \subset G$ ein bezüglich Inklusion maximaler Torus. Dann sei $\mathcal{N}(T) = \{g \in G : gTg^{-1} = T\}$ der Normalisator von T in G und $\mathcal{Z}(T) = \{g \in G : gtg^{-1} = t$ für alle $t \in T\}$ der Zentralisator von T.*

Dieser ist ein Normalteiler in $\mathcal{N}(T)$, und die Gruppe

$$W = \mathcal{N}(T)/\mathcal{Z}(T)$$

heißt die Weylgruppe zu (T, G).

Tatsache: W ist eine endliche Gruppe.

Beispiel: Sei $T = T_n$ in $G = GL_n(K)$. Dann ist

$$\mathcal{N}(T) = \{A = (a_{ij}) \in GL_n(K) : \text{in jeder Zeile und Spalte von } A$$
$$\text{befindet sich genau ein Eintrag } \neq 0\}$$

und

$$\mathcal{Z}(T) = T;$$

also ist W isomorph zur Gruppe der Permutationsmatrizen und damit zu $\mathcal{S}_n$.

Satz 6.6 *(Bruhat-Zerlegung)*

Es sei $T \subset G$ ein maximaler Torus und B eine Borelgruppe mit $T \subset B$. Dann ist

$$G = \dot{\bigcup_{w \in W}} BwB.$$

Beispiel: Im Fall $G = GL_n(K)$ haben wir einen direkten Beweis in Satz 5.7 gegeben.

Wir nehmen an, dass G halbeinfach ist und fixieren einen maximalen Torus $T \subset G$.

Dann betrachten wir $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$ und

$$\mathrm{Ad}\,|_T \colon T \longrightarrow GL(\mathfrak{g}).$$

Nach Lemma 5.2 existiert dann eine Basis von $\mathfrak{g}$ aus gemeinsamen Eigenvektoren der $\mathrm{Ad}(t)$ für $t \in T$. Wir können also $\mathfrak{g}$ in gemeinsame Eigenräume zerlegen:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\substack{\alpha \in X^*(T) \\ \alpha \neq 0}} \mathfrak{g}_\alpha,$$

wobei

$$\mathfrak{g}_0 = \{x \in \mathfrak{g} : \mathrm{Ad}(t)X = X \text{ für alle } t \in T\}$$

und

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} : \mathrm{Ad}(t)X = \alpha(t)X \text{ für alle } t \in T\}$$

für den Charakter $\alpha \in X^*(T) = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$ gilt.

Definition 6.7 *Es sei*

$$\Phi(T, G) = \{\alpha \in X^*(T) : \alpha \neq 0 \textit{ und } \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}.$$

Satz 6.8 $\Phi(T, G)$ *ist ein Wurzelsystem in* $X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Um diesen Satz zu zeigen, stattet man zunächst $V = X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ mit einem $W-$invarianten Skalarprodukt aus. Dazu wählt man ein beliebiges Skalarprodukt $(,)'$ und macht es via

$$(x, y) = \sum_{w \in W} (wx, wy)'$$

zu einem $W-$invarianten Skalarprodukt. Dann betrachtet man für jedes $\alpha \in \Phi(T, G)$ den Untertorus

$$\mathrm{Kern}(\alpha) = \{t \in T : \alpha(t) = 0\}$$

von T und darin die Zusammenhangskomponente T_α des Einselements. Die Weylgruppe von T in $\mathcal{Z}(T_\alpha) \subset G$ hat dann die Ordnung zwei und wird von einer Spiegelung erzeugt.

Beispiel: $G = Sp_4(K)$ und $T = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & t_1^{-1} & \\ & & & t_2^{-1} \end{pmatrix} \right\}$.

Dann ist $X^*(T) = \mathbb{Z}a_1 \oplus \mathbb{Z}a_2$ mit den Charakteren

$$a_1 \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & t_1^{-1} & \\ & & & t_2^{-1} \end{pmatrix} = t_1$$

und

$$a_2 \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & t_1^{-1} & \\ & & & t_2^{-1} \end{pmatrix} = t_2.$$

Es ist $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\ G = \left\{ M \in \mathrm{Mat}_4(K) : M^t \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{pmatrix} M \right\}$ (ÜA).

Für $t = \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & t_1^{-1} & \\ & & & t_2^{-1} \end{pmatrix} \in T$ ist $\mathrm{Ad}(t) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ die Konjugation mit t. Wir schreiben $M \in \mathrm{Mat}_4(K)$ als

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit $A, B, C, D \in \mathrm{Mat}_2(K)$. Dann ist

$$M^t \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C^t & A^t \\ -D^t & B^t \end{pmatrix}$$

und

$$- \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C & -D \\ A & B \end{pmatrix},$$

also folgt

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : B = B^t, C = C^t, A^t = -D \right\}.$$

Suchen wir hier nach gemeinsamen Eigenräumen alle $\mathrm{Ad}(t)$ für $t \in T$, so findet man folgende Eigenräume:

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} s_1 & & & 0 \\ & s_2 & & \\ & & -s_1 & \\ 0 & & & -s_2 \end{pmatrix} : s_1, s_2 \in K \right\}$$

$$g_{a_1-a_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 0 \end{pmatrix} : s \in K \right\}$$

$$g_{2a_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \begin{smallmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : s \in K \right\}$$

$$g_{a_1+a_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \begin{smallmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{smallmatrix} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : s \in K \right\}$$

$$g_{a_2-a_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : s \in K \right\}$$

$$g_{2a_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : s \in K \right\}$$

$$g_{-2a_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \begin{smallmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} & 0 \end{pmatrix} : s \in K \right\}$$

$$g_{-a_1-a_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \begin{smallmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{smallmatrix} & 0 \end{pmatrix} : s \in K \right\}$$

$$g_{-2a_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix} & 0 \end{pmatrix} : s \in K \right\}$$

Also ist

$$\Phi\{T, Sp_4(K)\} = \{\pm 2a_1, \pm 2a_2, \pm(a_1 + a_2), \pm(a_1 - a_2)\}$$

ein Wurzelsystem vom Typ C_2.