Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2023/2024
29. Januar 2024

Lie-Gruppen und Algebraische Gruppen
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Johannes Horn
Johannes Schwab
Nicole Müller

Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Zei ζ_n eine primitive n-te Einheitswurzel. Entscheiden Sie, für welche n die Untergruppe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}[\zeta_n]) \subseteq \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ ein Gitter ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $G = \mathrm{SL}(1, \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{a,b})$. Wir betrachten die folgenden Aussagen:

(i) $G_{\mathbb{Z}}$ ist kokompakt in G.

(ii) $(0,0,0,0)$ ist die einzige Lösung von $N(x) = 0$ für $x \in \mathbb{H}_{\mathbb{Z}}^{a,b}$.

(iii) $\mathbb{H}_{\mathbb{Q}}^{a,b}$ ist ein Schiefkörper.

Wir wollen zeigen, dass alle drei Aussagen äquivalent sind. Sie haben (iii) $\Rightarrow$ (i) in der Vorlesung gesehen.

(a) Zeigen Sie (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

(b) Führen Sie die Details von (i) $\Rightarrow$ (iii) aus.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Beweisen Sie das Jacobson-Morosov Lemma: Für jedes unipotente Element $u \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ gibt es eine Untergruppe $H \subseteq \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ so, dass H isogen zu $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ ist und $u \in H$.

Abgabe in der Vorlesung am **Montag, den 4. Februar**.