Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2023/2024
12. Januar 2024

Lie-Gruppen und Algebraische Gruppen
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Johannes Horn
Johannes Schwab
Nicole Müller

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (6 Punkte)

(a) Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit Fundamentalgruppe $\pi_1(G) = \mathbb{Z}$ und sei $\varphi : G \to S^1$ eine glatte Abbildung mit $\varphi_*(\pi_1(G)) \cong \pi_1(S^1)$, $\varphi(e) = 1$ und $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$. Zeigen Sie:

(i) Es gibt eine eindeutige glatte Abbildung $\eta : G \times G \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)e^{i\eta(g_1,g_2)}$$

mit $\eta(e,e) = 0$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi : G\times G \to S^1$, $\Phi(g_1, g_2) = \varphi(g_1g_2)\varphi(g_1)^{-1}\varphi(g_2)^{-1}$ einen eindeutigen glatten Logarithmus besitzt.

(ii) Für η gilt

i. $\eta(g, e) = \eta(e, g) = \eta(g, g^{-1}) = 0$,

ii. $\eta(g_1, g_2) + \eta(g_1g_2, g_3) = \eta(g_1, g_2g_3) + \eta(g_2, g_3)$.

(iii) Für die Abbildung $G \times \mathbb{R} \to S^1$, $(g, c) \mapsto \varphi(g)e^{-ic}$ ist 1 ein regulärer Wert und somit ist

$$\widetilde{G} = \{(g, c) \in G \times \mathbb{R} \mid \varphi(g) = e^{ic}\}$$

eine glatte Mannigfaltikgkeit von der gleichen Dimension wie G.

(iv) Die Verknüpfung $(g_1, c_1) \cdot (g_2, c_2) = (g_1, g_2, c_1 + c_2 + \eta(g_1, g_2))$ macht $\widetilde{G}$ zu einer Lie-Gruppe.

(v) Die Abbildung $\widetilde{G} \to G$, $(g, c) \mapsto g$ macht $\widetilde{G}$ zur universellen Überlagerung von G.

(b) Wir betrachten nun den Fall $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Jedes Element $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ erfüllt die Gleichung

$$(gv, gw) = (v, w) \qquad \forall v, w \in V,$$

wobei $(\cdot, \cdot)$ die symplektische Form gegeben durch

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Die Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

definiert eine komplexe Struktur auf $\mathbb{R}^2$. Wir können g eindeutig zerlegen in einen J-invarianten und J-antiinvarianten Teil $g = C_g + D_g$, d.h. $C_g = \frac{1}{2}(g - JgJ)$.

(i) Zeigen Sie: Es ist

$$C_g = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+d & b-c \\ c-b & a+d \end{pmatrix},$$

und durch den durch die komplexe Struktur J induzierten Isomorphismus operiert C_g auf $\mathbb{C}$ als Multiplikation mit $\frac{1}{2}\left((a+d)+i(c-b)\right)$

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\varphi(g) = \frac{\frac{1}{2}\left((a+d)+i(c-b)\right)}{|\det C_g|}$$

die Bedingungen aus Teil (a) erfüllt.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Sei $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Polynom. Angenommen $(a_1, \ldots, a_n)$ hat die Eigenschaft dass $P(e^{ka_1}, \ldots, e^{ka_n}) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Zeigen Sie, dass $P(e^{ta_1}, \ldots, e^{ta_n}) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ eine abgeschlossene lineare Gruppe die der gemeinsame Verschwindungslokus einer Menge reeller Polynomen in den Real- und Imaginärteilen der Matrixeinträge ist, und sei $\mathfrak{g}$ die zugehörige Lie-Algebra. Angenommen $G = G^*$. Sei $K = G \cap U(n)$ und $\mathfrak{p} = \mathfrak{g} \cap \{\text{Hermitische Matrizen}\}$. Dann ist die Abbildung $K \times \mathfrak{p} \to G$, $(k, X) \mapsto ke^X$ ein surjektiver Homöomorphismus.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\mathrm{SU}(n)$ einfach zusammenhängend ist und dass

$$\pi_1(\mathrm{SO}(n)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } n = 2, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{if } n > 2. \end{cases}$$

Hinweis: Ist G eine Lie-Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe, so ist $\pi_2(G/H) \to \pi_1(H) \to \pi_1(G) \to \pi_1(G/H)$ eine exakte Sequenz.

Abgabe in der Vorlesung am **Montag, den 15. Januar**.