Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2022/23
23. Januar 2023

Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
M.Sc. Jeonghoon So
M.Sc. Johannes Schwab

Übungsblatt 11

Aufgabe 1

Wir betrachten den $\mathbb{Z}$-Modul

$$M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$$

für zwei verschiedenen Primzahlen p, q. Bestimmen Sie $M \otimes S^{-1}\mathbb{Z}$ für

(a) $S = \{1, p, p^2, p^3, \dots\}$,

(b) $S = \mathbb{Z} \setminus (q)_\mathbb{Z}$,

(c) $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus

- einer Klasse von Objekten $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,
- für je zwei Objekte $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ einer Menge $\mathrm{Mor}_\mathcal{C}(A, B)$, genannt Morphismen von A nach B,
- Verknüfungsabbildungen

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(B, C) \times \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(A, B) &\to \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(A, C), \\ (g, f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

so dass

- für $f \in \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(B, C)$, $h \in \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(C, D)$ gilt $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$,
- für jedes Objekt $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ gibt es einen *Identitätsmorphismus* id_A mit $\mathrm{id}_A \circ f = f$ und $g \circ \mathrm{id}_A = g$ für alle Morphismen nach und von A.

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein *kovarianter Funktor* F von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ ist eine Abbildung so dass

- für jedes Objekt $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ist $F(A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$,
- für jeden Morphismus $f : A \to B$ in $\mathcal{C}$ ist $F(f) : F(A) \to F(B)$ ein Morphismus in $\mathcal{D}$ so dass
  - $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$ für alle $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,
  - $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ für alle Morphismen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ in $\mathcal{C}$.

Ein *kontravarianter Funktor* F von $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist eine Abbildung so dass

- für jedes Objekt $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ist $F(A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$,

- für jeden Morphismus $f : A \to B$ in $\mathcal{C}$ ist $F(f) : F(B) \to F(A)$ ein Morphismus in $\mathcal{D}$ so dass
  - $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$ für alle $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,
  - $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ für alle Morphismen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ in $\mathcal{C}$.

Ein kovarianter Funktor F heißt *rechtsexakt*, wenn für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

auch die Sequenz

$$F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$$

exakt ist. Ein kovarianter Funktor F heißt *linksexakt*, wenn für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

auch die Sequenz

$$0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$$

exakt ist. Ein kontravarianter Funktor F heißt *rechtsexakt*, wenn für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

auch die Sequenz

$$F(C) \to F(B) \to F(A) \to 0$$

exakt ist. Ein kontravarianter Funktor F heißt *linksexakt*, wenn für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

auch die Sequenz

$$0 \to F(C) \to F(B) \to F(A)$$

exakt ist. Ein Funktor heißt *exakt*, wenn er sowohl rechts- als auch linksexakt ist.

(a) Machen Sie sich klar, dass **Set** (Mengen) und **R-Mod** (R-Moduln) mit der offensichtlichen Wahl von Morphismen Kategorien bilden.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} - \otimes_R N : \textbf{R-Mod} &\to \textbf{R-Mod} \\ M &\mapsto M \otimes_R N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(N, -) : \textbf{R-Mod} &\to \textbf{R-Mod} \\ M &\mapsto \mathrm{Hom}_R(N, M) \end{aligned}$$

(wohldefinierte) kovariante Funktoren sind und dass

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(-, N) : \textbf{R-Mod} &\to \textbf{R-Mod} \\ M &\mapsto \mathrm{Hom}_R(M, N) \end{aligned}$$

ein (wohldefinierter) kontravarianter Funktor ist.

(c) Aus der Vorlesung ist bekannt dass $- \otimes_R N$ rechtsexakt ist. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}_R(N, -)$ und $\mathrm{Hom}_R(-, N)$ linksexakt sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei R ein Ring, $S \subseteq R$ ein multiplikatives System und M ein R-Modul. Zeigen Sie:

(a) $S^{-1}M \cong M \otimes_R S^{-1}R$.

(b)

$$\begin{aligned} S^{-1} : \mathbf{R\text{-}Mod} &\to \mathbf{R\text{-}Mod} \\ M &\mapsto S^{-1}M \end{aligned}$$

ist ein exakter Funktor.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei R ein Ring und seien M und A_i R-Moduln für $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Der offensichtliche Morphismus

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{R\text{-}Mod} &\to \mathbf{R\text{-}Mod} \\ (\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i) \otimes_R M &\mapsto \prod_{i \in \mathbb{N}} (A_i \otimes_R M) \end{aligned}$$

ist im Allgemeinen kein Isomorphismus.

(b) Der Morphismus φ ist surjektiv falls M endlich erzeugt ist.

Abgabe bis Beginn der Vorlesung am **Montag, 30.01.2023**.