Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2022/23
16. Januar 2023

Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
M.Sc. Jeonghoon So
M.Sc. Johannes Schwab

Übungsblatt 10

Aufgabe 1

Seien A, B kommutative R-Algebren.

(a) Zeigen Sie, dass die (bilineare Fortsetzung der) Abbildung

$$m : (A \otimes_R B) \times (A \otimes_R B) \to A \otimes_R B, (a \otimes b, a' \otimes b') \mapsto aa' \otimes bb'$$

wohldefiniert ist und $A \otimes_R B$ zu einer R-Algebra macht.

(b) Das Koprodukt der R-Algebren A, B ist eine R-Algebra C zusammen mit Morphismen $f_A : A \to C$ und $f_B : B \to C$, so dass es für jede andere R-Algebra D mit Morphismen $g_A : A \to C$ und $g_B : B \to C$ genau einen Morphismus $h : C \to D$ mit $g_\bullet = h \circ f_\bullet$ gibt. Zeigen Sie, dass $A \otimes_R B$ das Koprodukt der R-Algebren A und B ist.

Aufgabe 2

Sei $\sigma : R \to A$ eine kommutative R-Algebra und $I \subseteq R$ ein Ideal. Zeigen Sie:

(a) $A \otimes_R R[x] \cong A[x]$.

(b) $R/I \otimes_R R[x] \cong A/\langle \sigma(I) \rangle$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\mathrm{ggT}(m, n)\mathbb{Z}$.

(b) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^2$.

Aufgabe 4

Seien M, N R-Moduln. Eine multilineare Abbildung $\varphi : M^n \to N$ nennen wir *alternierend*, falls für alle $1 \leq i < j \leq n$ und $x_i = x_j$ gilt

$$\varphi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = 0.$$

Zeigen Sie, dass es zu jedem R-Modul N und jeder alternierenden Abbildung $\varphi : M^n \to N$ genau eine R-lineare Abbildung $\Phi : \Lambda^n(M) \to N$ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "\wedge"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \Lambda^n(M) \arrow[d, dashed, "\Phi"] \\ & N \end{tikzcd}$$

Aufgabe 5

Sei R ein nullteilerfreier Ring und M ein flacher R-Modul. Zeigen Sie, dass M torsionsfrei ist.

Abgabe bis Beginn der Vorlesung am **Montag, 23.01.2023**.