Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2022/23
12. Januar 2023

Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
M.Sc. Jeonghoon So
M.Sc. Johannes Schwab

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 08

Aufgabe 1

Sei G eine Gruppe, $P \subset G$ eine p-Sylowgruppe und $N \subset G$ ein Normalteiler. Zeigen Sie, dass $P \cap N$ eine p-Sylowgruppe von N ist.

Lösungsvorschlag

Wir wissen dass $P \cap N$ eine p-Gruppe in N ist. Deshalb gibt es eine p-Sylowgruppe $Q \subseteq N$ mit $P \cap N \subseteq Q$. Wir wollen zeigen dass Gleichheit gelten muss. Die Untergruppe Q ist auch eine p-Gruppe in G. Deshalb gibt es ein $g \in G$ mit $Q \subseteq gPg^{-1}$. Da N normal ist gilt $gNg^{-1} = N$, also auch

$$P \cap N = Q \subseteq gPg^{-1} \cap N = gPg^{-1} \cap gNg^{-1} = g(P \cap N)g^{-1}.$$

Alle Gruppen sind endlich unf $|P \cap N| = |g(P \cap N)g^{-1}|$, also sind alle Inklusionen in Wahrheit Gleichheiten.

Aufgabe 2

Sei K ein Körper und

$$T_n(K) = \{A = (a_{ij}) : \; a_{ij} = 0 \; \text{ for } \; i > j, \; a_{ii} \neq 0\} \subset \mathrm{GL}_n(K)$$

die Gruppe der invertierbaren oberen Dreiecks-Matrizen. Sei

$$U_n(K) = \{A = (a_{ij}) : \; a_{ij} = 0 \; \text{ for } \; i > j, \; a_{ii} = 1\} \subset T_n(K)$$

der Normalteiler der oberen Dreiecks-Matrizen mit Diagonaleinträgen $= 1$. Sei

$$\mathrm{Diag}_n(K) = \{A = (a_{ij}) : \; a_{ij} = 0 \; \text{ for } \; i \neq j, \; a_{ii} \neq 0\} \subset \mathrm{GL}_n(K)$$

die abelsche Untergruppe der Diagonalmatrizen.

(a) Finde einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\pi_n : T_n(K) \to \mathrm{Diag}_n(K).$$

(b) Finde einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$U_n(K) \to U_{n-1}(K).$$

(c) Zeigen Sie, dass $T_n(K)$ auflösbar ist.

(d) Schreibe die Gruppe $T_n(K)$ als semidirektes Produkt von $U_n(K)$ und einer weiteren Gruppe.

Lösungsvorschlag

(a) Wir betrachten den Homomorphismus

$$\begin{aligned} \pi_n : T_n(K) &\to \mathrm{Diag}_n(K), \\ A = (a_{ij})_{ij} &\mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dieser ist offensichtlich surjektiv.

(b) Wir betrachten den surjektiven Homomorphismus

$$\begin{aligned} U_n(K) &\to U_{n-1}(K), \\ \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dessen Kern genau

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} : (a_1, ..., a_n) \in K^{n-1} \right\} \simeq K^{n-1}$$

ist.

(c) Der Kern von π_n ist der Normalteiler $U_n(K)$, die Untergruppe der normierten oberen Dreiecksmatrizen. Wir sind fertig wenn wir zeigen können dass $U_n(K)$ auflösbar ist für alle n. Wir argumentieren per Induktion. Die Gruppe $U_1(K)$ is die triviale Gruppe und daher auflösbar. Wegen des Homomorphismus aus (b) und des Homomorphiesatzes gilt $U_n(K)/K^n \simeq U_{n-1}(K)$. Die additive Gruppe K^{n-1} is abelsch und daher auflösbar. Da nach Induktionsbehauptung $U_{n-1}(K)$ auflösbar ist, ist die Gruppe $U_n(K)$ auch auflösbar.

(d) Sei

$$\Psi : \mathrm{Diag}_n(K) \to \mathrm{Aut}(U_n(K)),$$

wobei $\Psi(A)(B) = A \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{11}b_{12}}{a_{22}} & \frac{a_{11}b_{13}}{a_{33}} & \cdots & \frac{a_{11}b_{1n}}{a_{nn}} \\ 0 & 1 & \frac{a_{22}b_{13}}{a_{22}} & \cdots & \frac{a_{22}b_{2n}}{a_{nn}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{a_{n-1n-1}b_{n-1n}}{a_{nn}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ für ein

$$A = (a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}) \in \mathrm{Diag}_n(K)$$

und

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & b_{13} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in U_n(K).$$

Wir behaupten, dass der Homomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi : U_n(K) \rtimes \mathrm{Diag}_n(K) &\to T_n(K), \\ (B, A) &\mapsto B \cdot A \end{aligned}$$

der gesuchte Gruppenisomorphismus ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \varphi((B,A)(B',A')) &= \varphi(B \cdot \Psi(A)(B'), A \cdot A') \\ &= \varphi(B \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{11}b_{12}}{a_{22}} & \frac{a_{11}b_{13}}{a_{33}} & \cdots & \frac{a_{11}b_{1n}}{a_{nn}} \\ 0 & 1 & \frac{a_{22}b_{13}}{a_{22}} & \cdots & \frac{a_{22}b_{2n}}{a_{nn}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{a_{n-1n-1}b_{n-1n}}{a_{nn}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, A \cdot A') = \cdots \\ &= (B \cdot A) \cdot (B' \cdot A') = \varphi(B, A) \cdot \varphi(B', A'), \end{aligned}$$

die Abbildung φ ist also in der Tat ein Homomorphismus. Es bleibt die Bijektivität zu zeigen. Sei dazu $A \in U_n(K)$ und $B \in \mathrm{Diag}_n(K)$, sodass $A \cdot B = \mathrm{id}_n$. Dann ist insbesondere $A \in \mathrm{Diag}_n(K)$. Da

$$U_n(K) \cap \mathrm{Diag}_n(K) = \{I_n\}$$

ist $A = I_n$. Das zeigt die Injektivität. Sei nun $B = (b_{ij})_{ij} \in T_n(K)$. Dann gibt es eine Zerlegung

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{13} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b_{12}}{b_{22}} & \frac{b_{13}}{b_{33}} & \cdots & \frac{b_{1n}}{b_{nn}} \\ 0 & 1 & \frac{b_{13}}{b_{33}} & \cdots & \frac{b_{2n}}{b_{nn}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{b_{n-1n}}{b_{nn}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn}. \end{pmatrix}$$

Die beiden Faktoren geben uns das gesuchte Urbild. Damit ist der Homomorphismus auch surjektiv.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass die Quaternionengruppe kein semidirektes Produkt einer Gruppe der Ordnung 4 und einer Gruppe der Ordnung 2 ist.

(b) Zeigen Sie: Eine Gruppe G hat eine Untergruppe H mit Index 2 und ein Element $g \in G \backslash H$ der Ordnung 2 genau dann, wenn G als semidirektes Prdukt $G = H \rtimes \mathbb{Z}_2$ geschrieben werden kann.

(c) Zeigen Sie, dass die Gruppen aus Blatt 4 Aufgabe 2 alle Gruppen der Ordnung 8 sind.

Lösungsvorschlag

(a) Die Quaternionengruppe hat nur ein einziges Element von Ordnung 2, sei diese $\bar{e}$. Jede Untergruppe von Ordnung 4 ist somit zyklisch und enthält $\bar{e}$ (das Quadrat des Erzeugers muss Ordung 2 haben). Somit gibt es keine Untergruppen H, N von Ordnung 4 und 2 mit trivialem Schnitt.

(b) Die Gruppe H hat Index 2, ist also insbesondere ein Normalteiler. Die Behauptung folgt aus Satz 4.17.

(c) Sei G eine Gruppe von Ordnung 8. Falls G ein Element von Ordnung 8 enthält, so ist G zyklisch und $G \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Angenommen dies ist nicht der Fall. Nach Lagrange hat dann jedes Element von $G \setminus \{1\}$ die Ordnung 2 oder 4.

Angenommen G enhält kein Element von Ordnung 4. Dann hat jedes Element $\neq 1$ Ordung 2, es gilt $x = x^{-1}$ und G ist insbesondere abelsch. Seien $a \neq b \in G \setminus \{1\}$, und sei $c \in G \setminus \{1, a, b, ab\}$. Wir behaupten dass $G = \{1, a, b, c, ab, ac, bc, abc\}$. Es reicht zu zeigen, dass die gelisteten Elemente verschieden sind, was leicht einzusehen ist (G ist abelsch!). Die Gruppe ist also isomorph zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

Angenommen G enhält ein Element a der Ordnung 4. Sei $H := \langle a \rangle$ die zyklische Untergruppe vom Index 2. Insbesondere ist H normal. Falls es ein $b \in G \setminus H$ von Ordnung 2 gibt, so ist G ein semidirektes Produkt $\langle a \rangle \ltimes \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Falls das Produkt in Wahrheit direkt ist, so ist $G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, andernfalls ist $G \cong D_4$. Falls jedes $b \in G \setminus H$ von Ordnung 4 ist, so fixieren wir ein solches b. Dann ist $b^2 = a^2$, denn a^2 ist das einzige Element von Ordnung 2. Da H normal ist sind die Elemente von $G = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$. Es muss $ba = a^3b$ gelten, denn es muss $ba \notin \langle a \rangle$ gelten und die anderen beiden Wahlen führen zu Widersprüchen: $ba = ab \Rightarrow (a^3b)^2 = e$ und $ba = a^2b \Rightarrow ba = b^3 \Rightarrow a = b^2$. Also ist $G \cong \langle a, b \mid a^4 = 1, a^2 = b^2, ba = a^3b \rangle$ die Quaternionengruppe.

Abgabe bis Beginn der Vorlesung am **Montag, 19.12.2022**.