Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2022/23
9. Januar 2023

Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
M.Sc. Jeonghoon So
M.Sc. Johannes Schwab

Übungsblatt 09

Die ersten drei Aufgaben *werden im Tutorium am 10.01.23 besprochen und* ***sind nicht abzugeben****.*

Aufgabe 1

Sei R ein nullteilerfreier Ring, M ein R-Modul, und $M_{\text{Tor}} \subseteq M$ die Torsionselemente. Zeigen Sie, dass M_{Tor} ein Untermodul ist und dass M/M_{Tor} torsionsfrei ist.

Aufgabe 2

Sei R ein Ring.

(a) Seien $N \subseteq M$ R-Moduln. Geben Sie eine Bijektion

$$\{U \subseteq M/N \text{ Untermodul}\} \leftrightarrow \{U \subseteq M \text{ Untermodul} \mid N \subseteq U \subseteq M\}$$

an.

(b) Sei

$$0 \to N \to M \to P \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Seien $\ell_R(N), \ell_R(M), \ell_R(P) < \infty$. Zeigen Sie, dass $\ell_R(M) = \ell_R(N) + \ell_R(P)$.

Aufgabe 3

Sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Der Modul M heißt *irreduzibel* oder *einfach*, falls $M \neq \{0\}$ ist und M keine echten Untermoduln besitzt. Zeigen Sie:

(a) M ist genau dann irreduzibel, wenn $M \neq \{0\}$ von jedem Element $\neq 0$ erzeugt wird.

(b) M ist genau dann irreduzibel, wenn es ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subseteq R$ mit $M \cong R/\mathfrak{m}$ gibt.

(c) Seien M und N irreduzible R-Moduln. Dann ist $\phi : M \to N$ stets 0 oder ein Isomorphismus.

Die folgenden Aufgaben sind wie gewohnt abzugeben.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Elementarteiler (ohne Basen) der folgenden Untermodule:

(a) $M_1 = \langle (2,4,2), (8,2,18) \rangle_{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{Z}^3$

(b) $M_2 = \langle (2x, x, x^3, 0, x^3 + x), (4x^2, 0, x^2 + x, x, x^4 + 2x^3) \rangle_{\mathbb{Q}[X]} \subseteq \mathbb{Q}[x]^5$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Elementarteiler und die zugehörigen Basen der folgenden Untermodule:

(a) $M_3 = \langle (1, 0, -1), (4, 3, -1), (0, 9, 3), (3, 12, 3) \rangle_{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{Z}^3$

(b) $M_4 = \langle (x^2, x^9 + x^5 + x^4 + x^2, x^6 + x^2), (x^3 + x, f, x^7 + x^5 + x^3) \rangle_{\mathbb{Q}[x]} \subseteq \mathbb{Q}[x]^3$, where $f = x^{10} + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei R ein Integritätsring.

(a) Zeigen Sie: ein Ideal $I \subset R$ ist ein freier R-modul genau dann, wenn I ein Hauptideal ist.

(b) Finden Sie einen endlich erzeugten $\mathbb{Z}[X]$-Modul der nicht frei ist.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Es sei R ein Ring und M_1, M_2, M_3 seien R-Moduln. Zeigen Sie, dass

(a) $M_1 \otimes_R M_2 \simeq M_2 \otimes_R M_1$

(b) $(M_1 \otimes_R M_2) \otimes_R M_3 \simeq M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$.

In anderen Worten: Das Tensorprodukt ist symmetrisch und assoziativ.

Abgabe bis Beginn der Vorlesung am **Montag, 15.01.2023**.