Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2022/23
12. Dezember 2022

Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
M.Sc. Jeonghoon So
M.Sc. Johannes Schwab

Übungsblatt 08

Aufgabe 1

Sei G eine Gruppe, $P \subset G$ eine p-Sylowgruppe und $N \subset G$ ein Normalteiler. Zeigen Sie, dass $P \cap N$ eine p-Sylowgruppe von N ist.

Aufgabe 2

Sei K ein Körper und

$$T_n(K) = \{A = (a_{ij}) : \ a_{ij} = 0 \ \text{ for } \ i > j, \ a_{ii} \neq 0\} \subset \mathrm{GL}_n(K)$$

die Gruppe der invertierbaren oberen Dreiecks-Matrizen. Sei

$$U_n(K) = \{A = (a_{ij}) : \ a_{ij} = 0 \ \text{ for } \ i > j, \ a_{ii} = 1\} \subset T_n(K)$$

der Normalteiler der oberen Dreiecks-Matrizen mit Diagonaleinträgen $= 1$. Sei

$$\mathrm{Diag}_n(K) = \{A = (a_{ij}) : \ a_{ij} = 0 \ \text{ for } \ i \neq j, \ a_{ii} \neq 0\} \subset \mathrm{GL}_n(K)$$

die abelsche Untergruppe der Diagonalmatrizen.

(a) Finde einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\pi_n : T_n(K) \to \mathrm{Diag}_n(K).$$

(b) Finde einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$U_n(K) \to U_{n-1}(K).$$

(c) Zeigen Sie, dass $T_n(K)$ auflösbar ist.

(d) Schreibe die Gruppe $T_n(K)$ als semidirektes Produkt von $U_n(K)$ und einer weiteren Gruppe.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass die Quaternionengruppe kein semidirektes Produkt einer Gruppe der Ordnung 4 und einer Gruppe der Ordnung 2 ist.

(b) Zeigen Sie: Eine Gruppe G hat eine Untergruppe H mit Index 2 und ein Element $g \in G \backslash H$ der Ordnung 2 genau dann, wenn G als semidirektes Prdukt $G = H \rtimes \mathbb{Z}_2$ geschrieben werden kann.

(c) Zeigen Sie, dass die Gruppen aus Blatt 4 Aufgabe 2 alle Gruppen der Ordnung 8 sind.

Abgabe bis Beginn der Vorlesung am **Montag, 19.12.2022**.