

## Übungsblatt 07

### Aufgabe 1

- (i) Zeigen Sie, dass für  $p > 2$  jede  $p$ -Sylow-Untergruppe der Diedergruppe  $D_n$  zyklisch und normal ist.
- (ii) Sei  $G$  eine endliche  $p$ -Gruppe. Zeigen Sie, dass die Anzahl der nicht-normalen Untergruppen von  $G$  durch  $p$  teilbar ist.

### Aufgabe 2

- (i) Zeigen Sie, dass eine Gruppe von Ordnung 351 eine normale  $p$ -Sylow-Untergruppe hat für ein  $p \mid 351$ .
- (ii) Sei  $G$  eine Gruppe von Ordnung  $pqr$ , wobei  $p, q, r$  Primzahlen mit  $p < q < r$  sind. Zeigen Sie, dass  $G$  eine normale Sylow-Untergruppe für entweder  $p, q$ , oder  $r$  hat.

### Aufgabe 3

- (i) Sei  $H \subseteq G$  eine normale Untergruppe. Zeigen Sie, dass  $G$  auflösbar ist, genau dann wenn  $G/H$  und  $H$  auflösbar sind.
- (ii) Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung  $< 60$  auflösbar ist. Warum ist dies falsch für  $= 60$ ?

*Hinweis 1:* Sie dürfen ohne Beweis den Satz von Burnside nutzen: Jede endliche Gruppe der Ordnung  $p^a q^b$  für  $p, q$  prim und  $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  ist auflösbar.

*Hinweis 2:* Folgern Sie aus Aufgaben 3 (ii), 4 (i) und dem Satz von Burnside, dass jede Gruppe der Ordnung  $pqr$  mit  $p, q, r$  paarweise verschiedene Primzahlen auflösbar ist.