Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2022/23
28. November 2022

Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
M.Sc. Jeonghoon So
M.Sc. Johannes Schwab

Übungsblatt 06

Aufgabe 1

(i) Zeigen Sie, dass $1 + \sqrt[3]{2}$ kein Quadrat in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Aufgabe 2

(i) Sei K ein Körper und $L = K(a)$ eine einfache algebraische Erweiterung mit Minimalpolynom $f_a \in K[X]$ von a. Zeigen Sie, dass $f(x) = \mathrm{N}_{L/K}(x - a)$ für alle $x \in K$.

(ii) Sei L/K eine Erweiterung endlicher Körper. Zeigen Sie, dass $N_{L/K} : L^\times \to K^\times$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.

(iii) Sei nun L/K eine endliche nicht-separable Erweiterung (die Körper sind nicht notwendigerweise endlich). Zeigen Sie, dass $\mathrm{Tr}_{L/K}(a) = 0$ für alle $a \in L$.
Hinweis: Es ist entweder $L/K(a)$ oder $K(a)/K$ nicht-separabel. Benutzen Sie Satz 2.35.

Aufgabe 3

(i) Wir wollen alle *rationalen Punkte*[1] auf dem Einheitskreis gegeben durch die Gleichung $X^2 + Y^2 = 1$ im $\mathbb{R}^2$ bestimmen. Zeigen Sie, dass zwei rationale Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ die Gleichung $a^2 + b^2 = 1$ erfüllen genau dann, wenn es $m, n \in \mathbb{Z}$ gibt so dass

$$a = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}, \qquad b = \frac{2mn}{m^2 + n^2}.$$

Hinweis: Benutzen Sie Hilberts Satz 90 angewannt auf die Erweiterung $\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$.

(ii) Sei D eine positive quadratfreie Zahl[2]. Bestimmen Sie alle rationalen Punkte auf der Ellipse gegeben durch die Gleichung $X^2 + DY^2 = 1$ im $\mathbb{R}^2$.

Abgabe bis Beginn der Vorlesung am **Montag, 5.12.2022**.

[1] Ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ heißt rational, wenn $x, y \in \mathbb{Q}$.
[2] D.h. aus $D = EF^2$ mit $E, F \in \mathbb{Z}$ folgt $F \in \{\pm 1\}$.