Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2022/23
21. November 2022

Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
M.Sc. Jeonghoon So
M.Sc. Johannes Schwab

Übungsblatt 05

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei K ein Körper mit Charakteristik $\neq 0$ und $f \in K[X]$ ein seperables irreduzibles Polynom mit Nullstellen $\alpha_1, ..., \alpha_n$ in einem Zerfällungskörper L von f über K. Sei die Galoisgruppe von f zyklisch von gerader Ordnung. Zeigen Sie:

(a) Die Diskriminante $\Delta = \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)^2$ hat keine Quadratwurzel in K.

(b) Es gibt einen eindeutigen Zwischenkörper E von L/K, sodass $[E : K] = 2$, und zwar $E = K(\sqrt{\Delta})$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Galois-Gruppen folgender Polynome in $\mathbb{Q}[X]$:

(a) $X^3 + 6X^2 + 11X + 7$

(b) $X^3 + 3X^2 - 1$

(c) $X^4 - 4X^2 - 6$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $f = X^3 + Y^3 + Z^3 \in \mathbb{Q}[X, Y, Z]$. Finden Sie ein Polynom $F \in \mathbb{Q}[X_0, X_1, X_2, X_3]$, sodass

$$F(s_0, s_1, s_2, s_2) = f,$$

ist für s_i, die elementarsymmetrischen Polynome in $\mathbb{Q}[X, Y, Z]$.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass jede endliche Gruppe die Galois-Gruppe einer geeigneten Körpererweiterung ist.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ und ζ eine primitive n-te Einheitswurzel. Zeigen Sie, dass

$$[\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1}) : \mathbb{Q}] = \frac{\varphi(n)}{2}.$$

(Hier ist φ die Euler'sche Phi-Funktion.)

Abgabe bis Beginn der Vorlesung am **Montag, 28.11.2022**.