Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2021/22
14. November 2022

Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
M.Sc. Johannes Schwab
M.Sc. Jeonghoon So

Übungsblatt 04

Aufgabe 1

Sei L/K eine endliche Körpererweiterung mit Zwischenkörpern E und E' so dass E/K und E'/K endliche Galoiserweiterungen sind.

(i) Zeigen Sie, dass $E \cdot E'$ eine endliche Galoiserweiterung von K ist und dass der Homomorphismus

$$\varphi\colon \operatorname{Gal}(E \cdot E'/E) \longrightarrow \operatorname{Gal}(E'/E \cap E'), \qquad \sigma \longmapsto \sigma|_{E'}$$

ein Isomorphismus ist.

(ii) Zeigen Sie, dass der Homomorphismus

$$\eta\colon \operatorname{Gal}(E \cdot E'/K) \longrightarrow \operatorname{Gal}(E/K) \times \operatorname{Gal}(E'/K), \qquad \sigma \longmapsto \big(\sigma|_E, \sigma|_{E'}\big)$$

injektiv ist. Zeigen Sie weiter, dass im Fall $E \cap E' = K$ der Homomorphismus η surjektiv und damit ein Isomorphismus ist.

(iii) Zeigen Sie, dass $[E \cdot E' : K] = \frac{[E:K][E':K]}{[E \cap E':K]}$.

(iv) Die vorherige Formel ist im Allgemeinen falsch falls E/K und E'/K endlich, aber nicht Galoissch sind. Zeigen Sie dies mit einem Beispiel.
Hinweis: betrachten Sie zwei einfache Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ die von zwei verschiedenen Nullstellen von $X^3 - 2$ erzeugt werden.

Aufgabe 2

Es gibt fünf Gruppen der Ordnung acht: Die drei abelschen Gruppen $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, die Diedergruppe $D := \langle r, s \mid r^4 = s^2 = (rs)^2 = 1\rangle$ und die Quaternionengruppe $H := \langle \bar{e}, i, j, k \mid \bar{e}^2 = e, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = \bar{e}\rangle$. Wir betrachten die folgenden Körper als Erweiterungen von $\mathbb{Q}$:

$$\text{(i) } \mathbb{Q}(\zeta_{17} + \zeta_{17}^{-1}), \quad \text{(ii) } \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}, i), \quad \text{(iii) } \mathbb{Q}(\zeta_5, \sqrt{-3}),$$
$$\text{(iv) } \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i), \quad \text{(v) } \mathbb{Q}\Big(\sqrt{(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{3})}\Big).$$

(i) Jede der fünf Gruppen taucht genau ein mal als Galoisgruppe einer der fünf Körpererweiterungen auf. Ordnen Sie diese zu. Sie dürfen dabei benutzen dass die Zuordnung eine Bijektion ist.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für p prim die Galoisgruppe der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}$ zyklisch von Ordnung $p - 1$ ist.

(ii) Sei $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ eine Galoische Erweiterung und f_α das Minimalpolynom von α. Dann operiert die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ transitiv auf den Nullstellen von f_α. Dies definiert eine Einbettung $\varphi_\alpha : \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) \hookrightarrow S_n$, wobei n die Anzahl der (nach Voraussetzung paarweise verschiedenen) Nullstellen von α ist.
Beschreiben Sie die Abbildung φ_α für die fünf oben gegebenen Körpererweiterungen.

Abgabe bis Beginn der Vorlesung am **Montag, 21.11.2022**.