Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2022/23
31. Oktober 2022

Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
M.Sc. Johannes Schwab
M.Sc. Jeonghoon So

Übungsblatt 02

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass $X^n + 1$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist genau dann wenn $n = 2^k$ für eine nicht negative Zahl k. Stimmt dies auch in $\mathbb{Z}[X]$?
Hinweis: nutzen Sie Eisenstein's Kriterium nach einer geeigneten Substitution.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und seien $a, b \in K^\times$. Zeigen Sie, dass es genau dann einen K-Isomorphismus zwischen $K(\sqrt{a})$ und $K(\sqrt{b})$ gibt, wenn a/b ein Quadrat in K ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei R ein Ring. Für $x \in R$ betrachten wir die Auswertungsabbildung

$$\varphi_x \colon R[X] \to R, \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Beschreiben Sie den Kern von φ_x und entscheiden Sie, wann dieser ein Primideal bzw. ein maximales Ideal von $R[X]$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sie $\mathfrak{p}$ ein Primideal eines Ringes R. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{p}R[X]$ ein Primideal von $R[X]$ ist.

Abgabe bis Beginn der Vorlesung am **Montag, 7.11.2022**.