Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2022/23
24. Oktober 2022

Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
M.Sc. Johannes Schwab
M.Sc. Jeonghoon So

Übungsblatt 01

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) \subseteq \mathbb{C}$.

(i) Bestimmen Sie den Grad $[K : \mathbb{Q}]$ sowie eine Basis von K als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

(ii) Bestimmen Sie Minimalpolynome von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{2} + i$ über $\mathbb{Q}$.

(iii) Zeigen Sie, dass $\sqrt{2} + i$ ein primitives Element der Körpererweiterung $K/\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei L/K eine Körpererweiterung und M ein Zwischenkörper, d.h. $K \subseteq M \subseteq L$.

(i) Seien $\alpha, \beta \in L$ algebraisch über K. Zeigen Sie, dass $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$ algebraisch über K sind.

(ii) Zeigen Sie, dass L/K algebraisch ist falls M/K und L/M algebraisch sind.

(iii) Zeigen Sie, dass höchstens eine der beiden Zahlen $e + \pi$ und $e\pi$ algebraisch über $\mathbb{Q}$ sein kann. Dabei dürfen Sie verwenden, dass e und π transzendent über $\mathbb{Q}$ sind.
Tipp: Betrachten Sie die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(e, \pi)/\mathbb{Q}(e + \pi, e\pi)$.
Bemerkung: Man vermutet, dass $e+\pi$ *und* $e\pi$ *beide transzendent sind, es ist aber noch für keine der Zahlen bewiesen.*

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei F/K eine endliche Körpererweiterung und seien E und L Zwischenkörper. Wir bezeichnen mit $E \cdot L$ den kleinsten Unterkörper von F der E und L enthält.

(i) Seien S und T Teilmengen von F so dass $E = K(S)$ und $L = K(T)$. Zeigen Sie, dass

$$E \cdot L = K[S \cup T] = K(S \cup T).$$

(ii) Zeigen Sie, dass $[E \cdot L : K] \leq [E : K][L : K]$.

(iii) Geben Sie ein Beispiel an, in dem die vorherige Ungleichung strikt ist, und ein Beispiel, in dem die vorherige Ungleichung eine Gleichheit ist.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

(i) Sei $f(X) = a_d X^d + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ mit $a_d \neq 0$, und sei $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von f mit $\gcd(r, s) = 1$. Zeigen Sie, dass $r | a_0$ und $s | a_d$.

(ii) Bestimmen Sie, welche der folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel sind.

$$X^3 - X - 2, \qquad X^3 - 13,$$
$$3X^3 - 24, \qquad X^4 + 3X^3 + X^2 - 1.$$

(iii) Zeigen Sie, dass das Polynom $X^2Y + XY^2 - X - Y + 1$ in $\mathbb{Q}[X, Y]$ irreduzibel ist.

Abgabe bis Beginn der Vorlesung am **Montag, 31.10.2022**.