Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2022/23
24. Oktober 2022

Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
M.Sc. Johannes Schwab
M.Sc. Jeonghoon So

Übungsblatt 00

Präsenzaufgaben

Aufgabe 1 (3 Punkte)

(i) Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass

$$T := \{\alpha \in \mathrm{Aut}(G) \,|\, \alpha(U) = U \text{ für alle Untergruppen } U \text{ von } G\}$$

ein Normalteiler von $\mathrm{Aut}(G)$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$G := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \,|\, a, b, c \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \right\},$$

mit der üblichen Matrixmultiplikation, eine Gruppe der Ordnung 27 ist, bei der jedes Element, dass nicht die Identitätsmatrix ist die Ordnung 3 hat.
Benutzen Sie das, um zwei nicht-isomorphe endliche Gruppen zu finden, sodass für jedes n die Anzahl der Elemente der Ordnung n in beiden Gruppen gleich sind.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei R ein Ring. Wir schreiben 1 für das Einselement in R. ***Zeigen*** oder ***widerlegen*** Sie folgende Aussagen.

(i) Falls $x^2 = x$ für jedes $x \in R$, dann ist R kommutativ.

(ii) Falls I ein Ideal von R mit $1 \in I$ ist, dann ist $I = R$.

(iii) Falls I ein Ideal von R ist, dann ist auch $r(I) := \{x \in R \,|\, xa = 0 \text{ for all } a \in I\}$ ein Ideal von R.

(iv) Seien I und J Ideale von R, dann ist auch $\mathrm{prod}(I, J) := \{ab \,|\, a \in I \text{ and } b \in J\}$ ein Ideal von R.

(v) Falls R ein HIR (ein "Hauptidealring"), dann stimmt die vorherige Aussage

(vi) Wir betrachten $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ als Unterring von $\mathbb{C}$, mit der üblichen Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$. Die Abbildung

$$N\colon \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \longrightarrow \mathbb{Z}, \qquad a + b\sqrt{-5} \longmapsto a^2 + 5b^2$$

ist ein Ringhomomorphismus.

(vii) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist ein HIR.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei R ein Ring und I, J Ideale von R.

(i) Zeigen Sie, dass $I + J := \{a + b \,|\, a \in I \text{ and } b \in J\}$ ein Ideal von R ist.

(ii) Sei IJ die Menge aller Elemente von R, welche als endliche Summe von Elementen der Form ab geschrieben werden können, mit $a \in I$ und $b \in J$. Zeigen Sie, dass IJ ein Ideal von R ist.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

(i) ***Zeigen*** oder ***widerlegen*** Sie folgende Aussagen.

Die Menge der 2×2 Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, mit der üblichen Matrixmultiplikation, ist ein Körper.

(ii) Beweisen Sie, dass die folgenden Mengen von reellen Zahlen Unterkörper von $\mathbb{R}$ bilden.

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$
$$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] := \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

Diese Aufgaben werden nur in der Übung besprochen und sind nicht abzugeben.