Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2022
8. Juli 2022

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. Martin Möller
Jeonghoon So
Johannes Schwab

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $g = P(\mathbb{R}^2)$ die reelle projektive Gerade mit folgenden drei 4-Tupeln von Punkten auf g

(a)

$$P_0 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, P_1 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}, P_2 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix}, P_3 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$P_0' = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, P_1' = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}, P_2' = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}, P_3' = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(c)

$$P_0'' = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, P_1'' = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, P_2'' = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, P_3'' = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Entscheiden Sie welche 4-Tupel isomorph sind, d.h. für welches Paar von Tupeln gibt es eine Projektivität $g \to g$, welche den i-ten Tupeleintrag des einen Tupels auf den i-ten Tupeleintrag des anderen abbildet, für $i = 1, 2, 3, 4$. Geben Sie den jeweiligen Endomorphismus auf $\mathbb{R}^2$ an.

Hinweis: Doppelverhältnis

Lösungsvorschlag

Um zu entscheiden welche Tupel isomorph sind reicht es die Doppelverhältnisse zu betrachten (nach Prop 6.25). Wir berechnen jetzt $[P_0, P_1, P_2, P_3]$. Dafür müssen wir die eindeutige Projektivität finden, welche (P_0, P_1, P_2) komponentenweise auf

$$(\infty, 0, 1) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \cdot \mathbb{R}$$

abbildet. Dafür wählen wir Basisvektoren für die zugehörigen 1-dimensionalen Unterräume in $\mathbb{R}^2$.

Seien v_0,v_1,v_2, v_3 Basis von jeweils P_0, P_1, P_2, P_3 (dabei ist v_0, v_1, v_2 eine projektive Basis von $\mathbb{R}^2$). Sei $\lambda_0, \lambda_1, \mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R}$, sodass $v_2 = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 + v_1$ und $v_3 = \mu_0 v_0 + \mu_1 + v_1$, da v_0, v_1, v_2 eine projektive Basis ist, gilt $\lambda_0, \lambda_1 \neq 0$. Die Projektivität ist gegeben durch die lineare Abbildung $f(v_0) = \frac{1}{\lambda_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(v_1) = \frac{1}{\lambda_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Als Matrix geschrieben gilt

$f = [\lambda_1 v_1, \lambda_0 v_0]^{-1}$. Hierbei meinen wir die Inverse der 2×2 Matrix die $\lambda_1 v_1$ und $\lambda_0 v_0$ als Spalten haben.

Jetzt betrachten wir das Bild von v_3 unter der linearen Abbildung.

Es gilt nun $f(v_3) = \frac{\mu_0}{\lambda_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\mu_1}{\lambda_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Damit ist das Doppelverhältnis:

$$[P_0, P_1 P_2, P_3] = P(f(v_3)) = \begin{pmatrix} \frac{\mu_1}{\lambda_1} \\ \frac{\mu_0}{\lambda_0} \end{pmatrix} \cdot \mathbb{R}.$$

Wir haben das Doppelverhältnis nun allgemein gelöst und setzen für (a), (b) und (c) nur noch ein. Sei

$$v_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $v_2 = 3 \cdot v_0 + (-2) \cdot v_1$ und $v_3 = \frac{1}{2} \cdot v_0 + \frac{1}{2} \cdot v_1$. Damit ist

$$\begin{aligned}
[P_0, P_1, P_2, P_3] &= P(f)(P_3) = P(f(v_3)) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{-4} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \mathbb{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-4}{6} \end{pmatrix} \cdot \mathbb{R} = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

In der letzten Gleichheit identifizieren wir $P(\mathbb{R}^2)$ mit $\mathbb{R} \cup \infty$.

Jetzt wollen wir $[P_0', P_1', P_2', P_3']$ berechnen. Jetzt wählen wir Basisvektoren für die zugehörigen 1-dimensionalen Unterräume in $\mathbb{R}^2$.

$$v_0' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2' = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3' = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Es gilt $v_2' = v_0' + 2 \cdot v_1'$ und $v_3' = (-1) \cdot v_0' + 3 \cdot v_1'$. Damit ist

$$\begin{aligned}
[P_0', P_1', P_2', P_3'] &= P(f')(P_3) = P(f'(v_3')) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix} \cdot \mathbb{R} = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

In der letzten Gleichheit identifizieren wir $P(\mathbb{R}^2)$ mit $\mathbb{R} \cup \infty$.

Da für die ersten beiden Tupel das Doppelverhältnis gleich ist, gibt es die gesuchte Projektivität. Diese bekommen wir durch Komposition von f'^{-1} und f.

Wir berechnen die Matrix zur Abbildung $(v_0, v_1, v_2) \mapsto (\infty, 0, 1)$ (bildet die jeweiligen projektiven Basen aufeinander ab)

$$f = [-2v_1, 3v_0]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Und analog für $(v_0', v_1', v_2') \mapsto (1, \infty, 0)$

$$f' = [2v_1', v_0']^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte lineare Abbildung ist also gegeben durch die Matrix

$$f'^{-1} \circ f = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 20 & -36 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}.$$

Analog geht man jetzt zur Berechnung von $[P_0'', P_1'', P_2'', P_3'']$ und sieht, dass $[P_0'', P_1'', P_2'', P_3''] = \frac{-1}{6} \neq -3/2$ ist. Daher sind nur die ersten beiden isomorph.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir betrachten den projektiven Raum $P := P(\mathbb{R}^4)$. Berechnen Sie den Schnitt der projektiven Gerade

$$g = P(\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}) \subset P$$

und der projektiven Hyperfläche

$$H = P(\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}) \subset P.$$

Lösungsvorschlag

Um den Schnitt der beiden projektiven Unterräume zu berechnen, berechnen wir den Schnitt der der zugehörigen Unterräume im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ und projektivizieren den Schnitt. Im affinen ist der Schnittraum

$$\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Der Schnitt im projektiven Raum ist

$$P(\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien N, H zwei Gruppen und $\psi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass es genau eine Gruppe G mit Homomorphismen $i : N \to G$ und $j : H \to G$ gibt mit folgenden Eigenschaften.

(a) Für alle $n \in N, h \in H$ gilt

$$j(h)i(n)j(h)^{-1} = i(\psi(h)(n))$$

(b) Für jedes weitere Tripel $(G', i' : N \to G', j' : H \to G')$, sodass für alle $n \in N, h \in H$

$$j'(h)i'(n)j'(h)^{-1} = i'(\psi(h)(n))$$

gilt, gibt es einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $\Phi : G \to G'$, sodass

$$i' = \Phi \circ i \quad \text{und} \quad j' = \Phi \circ j.$$

Hierbei heißt *Es gibt genau eine Gruppe*, dass diese Gruppe eindeutig ist bis auf eindeutigen Isomorphismus. Oder in anderen Worte, gibt es Gruppen G_1 und G_2 welche beide zusammen mit passenden Gruppenhomomorphismen die Eigenschaften (a) und (b) erfüllen, dann gibt es einen eindeutigen Isomorphismus $G_1 \to G_2$.

Lösungsvorschlag

Wir müssen die Existenz eines solchen G zeigen und die Eindeutigkeit. Zur Eindeutigkeit. Angenommen es gibt ein G_1 und ein G_2 die beide (a) und (b) erfüllen. Wenn wir (b) auf G_1 anwenden mit G_2 als G', dann bekommen wir ein $\Phi_1 : G_1 \to G_2$. Analog bekommen wir ein $\Phi_2 : G_2 \to G_1$ (vertausche Rollen von G_1 und G_2). Jetzt benutzen wir wieder (b) für G_1 mit G_1 als G'. Das zugehörige Φ kann nun $\Phi_2 \circ \Phi_1$ sein, aber auch id_{G_1}. Wegen der Eindeutigkeit von Φ ist $\Phi_2 \circ \Phi_1 = \mathrm{id}_{G_1}$. Analog ist $\Phi_1 \circ \Phi_2 = \mathrm{id}_{G_2}$. Dann ist Φ_1 also der gesuchte Isomorphismus. Für die Existenz nehmen wir die Konstruktion des semidirekten Produkts. Wir betrachten also $N \times H$ mit der Verknüpfung $(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1\psi(h_1)(n_2), h_1h_2)$. Der Homomorphismus i sei die Inklusion $i(n) = (n, 1)$ und j die Inklusion $j(h) = (1, h)$. Wir überprüfen zuerst (a). Es gilt

$$\begin{aligned} j(h)i(n)j(h)^{-1} &= (1, h) \cdot (n, 1) \cdot (1, h^{-1}) = (\psi(h)(n), h) \cdot (1, h^{-1}) = (\psi(h)(n), hh^{-1}) \\ &= (\psi(h)(n), 1) = i(\psi(h)(n)). \end{aligned}$$

Nun zu (b). Sei $pr_1 : N \times H \to N$ die Projektion auf die erste Komponenten pr_2 die Projektion auf H. Das gesuchte Φ muss die Abbildung $(i' \circ pr_1) \cdot (j' \circ pr_2)$ sein. Denn sei $(n, h) \in G$ beliebig, dann ist

$$\Phi((n, h)) = \Phi(i(n)) \cdot \Phi(j(h)) = i'(n) \cdot j'(h) = (i'(pr_1(n, h))) \cdot (j'(pr_2(n, h))).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Klassifizieren Sie alle Gruppen die ein semidirektes Produkt von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}$ sind. Zeigen Sie, dass es eine abelsche und eine nicht-abelsche Gruppe gibt.

Lösungsvorschlag

Die semidirekten Produkte hängen von einem Homomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ ab. Als erstes wollen wir uns also $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ anschauen. Da $\mathbb{Z}$ zyklisch ist hängt ein $f \in \mathrm{Aut}(Z)$ nur vom Bild $\lambda_f := f(1) \in \mathbb{Z}$ der $1 \in \mathbb{Z}$ ab. Der Homomorphismus f ist dann die Multiplikation mit λ_f, da für $z \in \mathbb{Z}$ beliebig gilt, dass

$$f(z) = f(1 + 1 + ... + 1 + 1) = f(1) + f(1) + ... + f(1) + f(1) = z \cdot f(1) = \lambda_f \cdot z.$$

Invertierbar ist ein solcher Homomorphismus offensichtlich nur, wenn insbesondere $f(1) = \lambda_f$ eine Inverse hat. In $\mathbb{Z}$ ist daher $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$. Ersteres ist genau der Fall, wenn $f = \mathrm{id}$. Wenn $\lambda = -1$, dann ist f die Abbildung $z \mapsto -z$. Jetzt wollen wir uns einen beliebigen Homomorphismus $\psi : \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ anschauen. Dies hängt wieder nur vom Bild von $1 \in \mathbb{Z}$ ab. Angenommen $\psi(1) = \mathrm{id}$, dann ist $\psi(z) = \mathrm{id}$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ und das semidirekte Produkt ist schon das direkte Produkt

$$\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Jetzt sei $\psi(1) = f = (z \mapsto -z)$. Dann ist $\psi(x) = f^x = (z \mapsto (-1)^x(z))$. Nun ist $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ die Gruppe mit Elementen $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und der Verknüpfung

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1 f^{h_1}(n_2), h_1h_2) = ((-1)^{h_1} n_1n_2, h_1h_2).$$

Man sieht, dass diese Verknüpfung nicht symmetrisch ist, wenn wir h_1 gerade und h_2 ungerade und $n_1, n_2 \neq 0$ wählen. Denn dann ist

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1 n_2, h_1 h_2) \neq (-n_2 n_1, h_2 h_1) = (n_2, h_2) \cdot (n_1, h_1).$$

Abgabe bis Beginn der Vorlesung um **10:15** am **Montag, den 11. Juli**.