

Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Wir betrachten die Moulton-Ebene.

- (a) Seien $A = (x_1, y_1)$ und $B = (x_2, y_2)$ Punkte mit $x_1 < 0 < x_2$ und $y_1 > y_2$. Zeigen Sie, dass es genau eine Gerade durch A und B gibt.
- (b) Geben Sie ein Gegenbeispiel für den Satz von Desargues in der Moulton-Ebene an.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Wir gruppieren die vier Axiome der projektiven Ebene in Definition 5.7 im Skript wie folgt:

- (1) (V),
- (2) (G) und (R),
- (3) (S).

Zeigen Sie, dass diese drei Gruppen von Axiome unabhängig sind. D.h. geben Sie (mit kurzer Begründung) drei Beispiele von Geometrien an, die jeweils zwei der Gruppen von Axiomen erfüllen und die dritte verletzen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Wir betrachten eine projektive Ebene $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ der Ordnung n . Ein (k, r) -Bogen \mathcal{K} ist eine Menge von k Punkten $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}$ mit der Eigenschaft, dass auf jeder Geraden höchstens r viele Punkte aus \mathcal{K} liegen. Zeigen Sie, dass

$$k \leq rn - n + r$$

und falls r die Ordnung n nicht teilt

$$k \leq rn - n + r - 1$$

gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wir betrachten eine projektive Ebene $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ der Ordnung n . Ein *Oval* \mathcal{O} ist eine Menge von $n + 1$ Punkten mit der Eigenschaft, dass auf jeder Geraden höchstens zwei Punkte aus \mathcal{O} liegen. Man beobachte, dass es zu jedem Punkt $A \in \mathcal{O}$ genau eine Gerade t_A mit $t_A \cap \mathcal{O} = A$ gibt. Diese Gerade heißt *Tangente von \mathcal{O} in A* .

Es sei x_i die Anzahl der Punkte in $\mathcal{P} \setminus \mathcal{O}$, die auf genau i Tangenten von \mathcal{O} liegen. Zeigen Sie:

(a)

$$\sum_i x_i = n(n+1).$$

Hinweis: Zählen Sie die Paare (P, l) , wobei l eine Tangente von \mathcal{O} ist und $P \in l \setminus \mathcal{O}$.

(b)

$$\sum_i i(i-1)x_i = n(n+1).$$

Hinweis: Zählen Sie die Tripel (P, l, m) , wobei l, m verschiedene Tangenten von \mathcal{O} sind und $P \in l \cap m$.

(c) Ist n ungerade, so liegt jeder Punkt $\mathcal{P} \setminus \mathcal{O}$ auf keiner oder genau zwei Tangenten von \mathcal{O} .

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Machen Sie am Beispiel der Fano-Ebene deutlich, dass die Aussage in Teil (c) der vorherigen Aufgabe für n gerade nicht gilt.

Abgabe bis Beginn der Vorlesung um 10:15 am Montag, den 4. Juli.