Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2022
19. Juni 2022

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. Martin Möller
Jeonghoon So
Johannes Schwab

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ affine Räume über dem selben Körper K mit $O \in \mathbb{A}$ und $O^* \in \mathbb{B}$ fest gewählte Punkte sowie $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) Für alle $k > 0$, $P_0, ..., P_k \in \mathbb{A}$ und $\lambda_0, ..., \lambda_k \in K$ mit $\lambda_0 + ... + \lambda_k = 0$ gilt

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{OP_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{O^*\varphi(P_i)} = 0$$

(b) Für alle $k > 0$, $X, P_0, ..., P_k \in \mathbb{A}$ und $\lambda_0, ..., \lambda_k \in K$ mit $\lambda_0 + ... + \lambda_k = 1$ gilt

$$\overrightarrow{OX} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{OP_i} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{O^*\varphi(X)} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{O^*\varphi(P_i)}$$

(c) φ ist affin.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\mathbb{E} = (\mathbb{E}, \phi)$ ein euklidischer affiner Raum mit dem euklidischen Translationsraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Eine Ähnlichkeit auf $\mathbb{E}$ ist eine Abbildung $\psi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, für die es ein $c > 0$ gibt mit

$$d(\psi(P), \psi(Q)) = c \cdot d(P, Q) \;\text{ für alle } P, Q \in \mathbb{E}.$$

Zeigen Sie für $\psi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ und $P, P_0 \in \mathbb{E}$ die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) ψ ist eine Ähnlichkeit mit $\psi(P) = P_0$.

(b) Es gibt ein $c > 0$, so dass $c^{-1} f_\psi$ eine Isometrie ist. Dabei ist $f_\psi : V \to V$ definiert durch

$$f_\psi(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{P'\psi(Q)} \;\text{ für alle } Q \in \mathbb{E}. \;\text{ (Satz3.21)}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ als euklidischen affinen Raum mit dem Standardskalarprodukt. Sei $\mathbb{B}_1 \subset \mathbb{R}^3$ der affine Unterraum gegeben als Lösungsmenge des LGSs

$$\begin{aligned} z &= 2 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

und $\mathbb{B}_2 \subset \mathbb{R}^3$ der affine Unterraum gegeben als Lösungsmenge des LGSs

$$x - 3z = -4.$$

Bestimme den Abstand $d(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2$ affine Unterräume eines affinen euklidischen Raumes $\mathbb{E}$ mit zugehörigen Unterräumen W_1 und W_2. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen.

(a) Es gibt **genau** ein Tupel $(L_1, L_2) \in \mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2$ mit $d(L_1, L_2) = d(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$.

(b) Es gibt keine Geraden $g_1 \subset \mathbb{B}_1$ und $g_2 \subset \mathbb{B}_2$, sodass g_1 und g_2 parallel in $\mathbb{E}$ sind.

Abgabe bis Beginn der Vorlesung um **10:15** am **Montag, den 27. Juni**.