Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2022
13. Juni 2022

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. Martin Möller
Jeonghoon So
Johannes Schwab

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $(\mathbb{A}^n, V, \Phi)$ ein affiner Raum über einem Körper K. Weiter sei $G \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{A}^n)$ die Menge aller Geraden in $\mathbb{A}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass *parallel sein* eine Äquivalenzrelation auf G definiert.

(b) Definiert *parallel sein* eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller affinen Unterräume von $\mathbb{A}^n$?

(c) Sei $P \in \mathbb{A}^n$ ein Punkt und $g \in G$ eine Gerade. Zeigen Sie: Es gibt genau eine Gerade h die P enthält und parallel zu g ist.

(d) Zeigen Sie: auf jeder Geraden $g \in G$ liegen mindestens zwei Punkte.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $(\mathbb{A}^2, V, \Phi)$ ein 2-dimensionaler affiner Raum über einem Körper K. Wir wollen die folgende Variante des Satzes von Pappus beweisen:

Satz (Pappus) *Seien g, h zwei verschiedene parallele Geraden, $P_1, P_2, P_3 \in g$ und $Q_1, Q_2, Q_3 \in h$ paarweise verschieden. Sind $[\{P_1, Q_2\}]$ und $[\{P_2, Q_1\}]$ parallel sowie $[\{Q_2, P_3\}]$ und $[\{P_2, Q_3\}]$ parallel, so sind auch $[\{P_1, Q_3\}]$ und $[\{Q_1, P_3\}]$ parallel.*

Zeigen Sie dazu folgende Aussagen:

(a) Es gibt eine Affinität $F\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$, so dass

$$\Phi_{P_1}(F(P_1)) = (0,0), \qquad \Phi_{P_1}(F(P_2)) = (1,0), \qquad \Phi_{P_1}(F(Q_1)) = (0,1).$$

(b) Folgern Sie, dass es ein $c \in K$ gibt, so dass $\Phi_{P_1}(F(P_3)) = (c, 0)$.

(c) Bestimmen Sie $\Phi_{P_1}(F(Q_2))$ und $\Phi_{P_1}(F(Q_3))$ in Abhängigkeit von c.

(d) Beweisen Sie den obenstehenden Satz.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Wir betrachten $V = K^n$ als affinen Raum wie in Aufgabe 2 des vorherigen Blattes. In diesem speziellen Fall können wir Punkte des affinen Raums addieren und die Gruppe $\mathrm{GL}_n(K)$ operiert auf dem affinen Raum in der gewohnten Weise.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \varphi\colon V \times \mathrm{GL}_n(K) &\to \mathrm{Aff}(V) \\ (v, A) &\mapsto [a \mapsto (v + Aa)] \end{aligned}$$

eine Bijektion ist.

(b) Geben Sie eine Gruppenstruktur auf $V \times \mathrm{GL}_n(K)$ an, so dass φ ein Gruppenisomorphismus ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wir betrachten $V = \mathbb{R}^n$ als affinen Raum wie oben. Eine Teilmenge $A \subseteq V$ heißt *konvex*, falls für je zwei Punkte $v, w \in A$ gilt

$$\lambda v + (1 - \lambda)w \in V \qquad \text{für alle } \lambda \in [0, 1],$$

also die Strecke zwischen v und w ganz in A enthalten ist. Ein Punkt $z \in A$ heißt *extrem*, falls es keine Punkte $z \neq v, w \in A$ gibt so dass

$$z = \lambda v + (1 - \lambda)w \qquad \text{für ein } \lambda \in (0, 1).$$

Sei $F\colon V \to V$ affin und $A \subseteq V$ konvex. Zeigen Sie:

(a) $F(A)$ ist konvex.

(b) Ist F eine Affinität und $z \in A$ extrem, so ist auch $F(z) \in F(A)$ extrem.

Abgabe bis Beginn der Vorlesung um **10:15** am **Montag, den 20. Juni**.