Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2022
7. Juni 2022

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. Martin Möller
Jeonghoon So
Johannes Schwab

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und K ein Körper. Bestimmen Sie das Zentrum von $\mathrm{GL}_n(K)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Es sei V ein Vektorraum. Zeigen Sie: V (als Menge betrachtet) ist bezüglich des Vektorraums V und der Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi : V \times V &\to V,\\ (P, Q) &\mapsto \overrightarrow{PQ} := Q - P\end{aligned}$$

ein affiner Raum.

(b) Es sei A eine nichtleere Menge, V ein Vektorraum und $\Phi : A \times A \to V$ eine Abbildung. Weiter bezeichne

$$\overrightarrow{PQ} := \Phi(P, Q) \quad (P, Q \in A).$$

Zeigen Sie: A ist bezüglich V und Φ genau dann ein affiner Raum, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : A \to V$ gibt mit

$$\overrightarrow{PQ} = \varphi(Q) - \varphi(P) \quad \text{für alle } P, Q \in A.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei V ein K-Vektorraum und $P_1, ..., P_n \in V$. Dann gilt für die affine Hülle

$$[\{P_1, ..., P_n\}] = \{P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2}, ..., \overrightarrow{P_1P_n} \rangle_K\}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{B}$ eine nichtleere Teilmenge eines affinen Raum (A, V, Φ) über einem Körper K.

(a) Enthält $\mathbb{B}$ mit je drei Punkten P_0, P_1, P_2 stets auch deren affine Hülle, so ist $\mathbb{B}$ ein affiner Unterraum von A.

(b) Enthält $\mathbb{B}$ mit je zwei verschiedenen Punkten P_0 und P_1 auch deren Verbindungsgerade $[\{P_0, P_1\}]$ und gilt $K \neq \mathbb{F}_2$, so ist $\mathbb{B}$ ein affiner Unterraum von A.

Abgabe bis Beginn der Vorlesung um **10:15** am **Montag, den 13. Juni**.