Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2022
30. Mai 2022

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. Martin Möller
Jeonghoon So
Johannes Schwab

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Für ein $n \in \mathbb{Z}$ sei $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{ord}(a) = \frac{n}{\mathrm{ggT}(a, n)},$$

wobei $\mathrm{ggT}(0, n) = n$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe von Ordnung 25.

(a) Zeigen Sie, dass G ein Element von Ordnung 5 enthält.

(b) Folgern Sie, dass G eine Untergruppe von Ordnung 5 enthält.

(c) Zeigen Sie, dass G genau eine Untergruppe von Ordnung 5 enthält falls G zyklisch ist.
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1.

(d) Zeigen Sie, dass G mehr als eine Untergruppe von Ordnung 5 enthält falls G nicht zyklisch ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei G eine Gruppe und $Z(G)$ das Zentrum von G. Angenommen $G/Z(G)$ ist zyklisch. Zeigen Sie:

(a) Es gibt ein $g \in G$, so dass es für jedes $x \in G$ ein $z \in Z(G)$ und ein $a \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$x = g^a z.$$

(b) G ist abelsch.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Seien p, q Primzahlen und sei G eine Gruppe von Ordnung pq. Zeigen Sie, dass G abelsch ist oder dass $Z(G) = \{1\}$.
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe deren einzige Untergruppen $\{1\}$ und G sind (eine solche Gruppe heißt *einfach*). Weiter sei X eine endliche Menge. Angenommen G operiert nicht-trivial auf X (d.h. es gibt ein $g \in G$ und ein $x \in X$ mit $g \cdot x \neq x$). Zeigen Sie, dass G endlich ist und dass die Ordnung von G die Zahl $|X|!$ teilt.
Hinweis: o.E. sei $X = \{1, \ldots, n\}$. *Betrachten Sie die Abbildung* $\rho \colon G \to S_n,\ g \mapsto (i \mapsto g \cdot i)$.

Abgabe bis Beginn der Vorlesung um **10:15** am **Montag, den 6. Juni**.