Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2022
23. Mai 2022

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. Martin Möller
Jeonghoon So
Johannes Schwab

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien G eine Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe und $N, M \subset G$ Normalteiler, sodass $M \subseteq N \subseteq G$. Zeigen Sie:

(a) Die Teilmenge
$$HN := \{hn\ ;\ h \in H, n \in N\}$$
ist eine Untergruppe von G.

(b) $N \subset HN$ ist ein Normalteiler.

(c) Es gibt einen Gruppenisomorphismus
$$H/(H \cap N) \to HN/N.$$

(d) Es gibt einen Gruppenisomorphismus
$$(G/M)/(N/M) \to G/N.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir bezeichnen im Quadrat mit den Ecken $1, 2, 3, 4$ kurz mit ij für $1 \leq i < j \leq 4$ die Kante oder Diagonale zwischen den Ecken i und j. Betrachten Sie die Operation der Diedergruppe D_4 auf der Menge
$$X = \{12, 13, 14, 23, 24, 34\}$$
aller Kanten und Diagonalen im Quadrat. Bestimmen Sie die Bahnen und die Stabilisatoren für ein Vertretersystem der Bahnen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei X eine Menge und $f : X \to X$ eine selbstinverse bijektive Abbildung, d. h. $f^{-1} = f$.

(a) Zeigen Sie, dass durch die Vorschrift $(-1).x := f(x)$ eine Operation von $\{\pm 1\}$ auf X gegeben ist.

(b) Ein Element $x \in X$ heißt Fixpunkt von f, wenn $f(x) = x$ gilt. Zeigen Sie mit Hilfe der Bahnenformel, dass die Anzahl der Fixpunkte ungerade ist, wenn X endlich von ungerader Kardinalität ist.

(c) Zeigen Sie: Ist G eine endliche Gruppe von gerader Ordnung, dann enthält G ein Element der Ordnung 2.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Der Kommutator zweier Gruppenelemente $g, h \in G$ ist definiert als $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$. Die Kommutatoruntergruppe $[G, G] \subset G$ ist die Untergruppe, die von allen Kommutatoren erzeugt wird. Zeigen Sie:

(a) $gh = [g, h]hg$.

(b) $gh = hg \Leftrightarrow [g, h] = e$.

(c) $[G, G] = e \Leftrightarrow G$ ist abelsch.

(d) Ist $f : G \to H$ ein Homomorphismus, so gilt $f([G, G]) \subset [H, H]$. Wenn f surjektiv ist, gilt Gleichheit.

(e) Jeder Automorphismus von G schränkt sich zu einem Automorphismus von $[G, G]$ ein. Folgern Sie: $[G, G] \subset G$ ist ein Normalteiler.

(f) $G/[G, G]$ ist abelsch.

(g) Ist $f : G \to A$ ein Homomorphismus in eine abelsche Gruppe, gilt $[G, G] \subset \ker(f)$.

(h) Sei $q : G \to G/[G, G]$ die Quotientenabbildung. Es gibt einen Homomorphismus $f' : G/[G, G] \to A$, sodass $f' \circ q = f$.

Abgabe bis Beginn der Vorlesung um **10:15** am **Montag, den 30. Mai**.