Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2022
16. Mai 2022

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. Martin Möller
Jeonghoon So
Johannes Schwab

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ein Element von endlicher Ordnung. Zeigen Sie, dass $\mathrm{ord}(A) \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei P_n ein regelmäßiges n-Eck und sei D_n die Symmetriegruppe von P_n, die *Diedergruppe*. Sie r die Rotation um $2\pi/n$ um den Mittelpunkt und sei s die Spiegelung an einer Graden durch den Mittelpunkt und einen der Eckpunkte. Offenbar ist $r, s \in D_n$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $rs = sr^{-1}$.

(b) Die Untergruppe $U := \langle r, s\rangle \subseteq D_n$ hat Ordnung $2n$.

(c) Es gilt $|D_n| \leq 2n$.

(d) Folgern Sie, dass $U = D_n$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Entscheiden Sie für jede der folgenden Gruppen G, ob es sich bei den Untergruppen U um Normalteiler handelt.

(a) $G = \mathbb{Z}$, $U = \langle 2\rangle$.

(b) $G = D_n$ für $n \geq 3$, $U = \langle s\rangle$.

(c) $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $U = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

(d) $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $U = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ ist orthogonal}\}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $(G, \cdot)$ und $(H, *)$ Gruppen.

Ein *Produkt* von G und H ist eine Gruppe P zusammen mit zwei Gruppenhomomorphismen $g\colon P \to G$ und $h\colon P \to H$, die universell in folgendem Sinne sind: Für jede andere

Gruppe P' mit Gruppenhomomorphismen $g'\colon P' \to G$ und $h'\colon P' \to H$ gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $f\colon P' \to P$ so dass $g \circ f = g'$ und $h \circ f = h'$ gilt.

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[drr, bend left, "g'"] \arrow[dr, dashed, "\exists!"] \arrow[ddr, bend right, "h'"'] & & \\
& P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & G \\
& H &
\end{tikzcd}$$

Zeigen Sie:

(a) Sind P_1 und P_2 zwei Produkte von G und H mit Gruppenhomomorphismen $g_i\colon P_i \to G$ und $h_i\colon P_i \to H$, so sind P_1 und P_2 isomorph.

(b) Für alle Gruppen G und H existiert ein Produkt.

Abgabe bis Beginn der Vorlesung um **10:15** am **Montag, den 23. Mai**.