

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ ein Element von endlicher Ordnung. Zeigen Sie, dass $\text{ord}(A) \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei P_n ein regelmäßiges n -Eck und sei D_n die Symmetriegruppe von P_n , die *Diedergruppe*. Sie r die Rotation um $2\pi/n$ um den Mittelpunkt und sei s die Spiegelung an einer Geraden durch den Mittelpunkt und einen der Eckpunkte. Offenbar ist $r, s \in D_n$. Zeigen Sie:

- (a) Es gilt $rs = sr^{-1}$.
- (b) Die Untergruppe $U := \langle r, s \rangle \subseteq D_n$ hat Ordnung $2n$.
- (c) Es gilt $|D_n| \leq 2n$.
- (d) Folgern Sie, dass $U = D_n$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Entscheiden Sie für jede der folgenden Gruppen G , ob es sich bei den Untergruppen U um Normalteiler handelt.

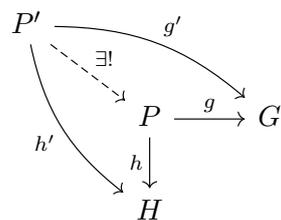
- (a) $G = \mathbb{Z}$, $U = \langle 2 \rangle$.
- (b) $G = D_n$ für $n \geq 3$, $U = \langle s \rangle$.
- (c) $G = \text{GL}_2(\mathbb{R})$, $U = \text{SL}_2(\mathbb{R})$.
- (d) $G = \text{GL}_2(\mathbb{R})$, $U = \text{SO}_2(\mathbb{R}) := \{A \in \text{SL}_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ ist orthogonal}\}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien (G, \cdot) und $(H, *)$ Gruppen.

Ein *Produkt* von G und H ist eine Gruppe P zusammen mit zwei Gruppenhomomorphismen $g: P \rightarrow G$ und $h: P \rightarrow H$, die universell in folgendem Sinne sind: Für jede andere

Gruppe P' mit Gruppenhomomorphismen $g': P' \rightarrow G$ und $h': P' \rightarrow H$ gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $f: P' \rightarrow P$ so dass $g \circ f = g'$ und $h \circ f = h'$ gilt.



Zeigen Sie:

- (a) Sind P_1 und P_2 zwei Produkte von G und H mit Gruppenhomomorphismen $g_i: P_i \rightarrow G$ und $h_i: P_i \rightarrow H$, so sind P_1 und P_2 isomorph.
- (b) Für alle Gruppen G und H existiert ein Produkt.