Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2022
2. Mai 2022

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. Martin Möller
Jeonghoon So
Johannes Schwab

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei f ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen metrischen Vektorraums V mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt
$$\operatorname{Kern} f^* = (\operatorname{Bild} f)^\perp \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Bild} f^* = (\operatorname{Kern} f)^\perp.$$

(b) Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ ist genau dann f-invariant, wenn $W^\perp$ f^*-invariant ist.
Hinweis: Ein Untervektorraum W heißt *f-invariant*, falls $f(W) \subseteq W$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Standardskalarprodukt seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$$

gegeben. Sei f ein selbstadjungierter Endomorphismus, für den die Unvervektorräume $[a]$ und $[a,b]$ f-invariant sind und außerdem $f(x) = y$ gilt. Zeigen Sie, dass f eindeutig bestimmt ist und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von f bezüglich der Standardbasis.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Zeigen Sie:

(a) Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ ist selbstadjungiert, genau dann wenn
$$\langle f(v), v\rangle \in \mathbb{R} \qquad \text{für alle } v \in V.$$

(b) Zwei Endomorphismen $f, h\colon V \to V$ sind gleich, genau dann wenn
$$\langle f(v), v\rangle = \langle h(v), v\rangle \qquad \text{für alle } v \in V.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$, $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und $\pi\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) π ist Orthogonalprojektion auf U.

(b) $\operatorname{Bild} \pi = U$, $\pi^2 = \pi$ und

$$\|\pi(v) - \pi(w)\| \leq \|v - w\| \qquad \text{für alle } v, w \in V.$$

(c) $\operatorname{Bild} \pi = U$, $\pi^2 = \pi$ und

$$\|\pi(v)\| \leq \|v\| \qquad \text{für alle } v \in V.$$

(d) $\operatorname{Bild} \pi = U$, $\pi^2 = \pi$ und π ist selbstadjungiert.

Abgabe bis Beginn der Vorlesung um **10:15** am **Montag, den 09. Mai**.