Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2022
25. April 2022

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. Martin Möller
Jeonghoon So
Johannes Schwab

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben sei die Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle_A : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, (x,y)\mapsto x^tAy$, wobei

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Hurwitzsches Definitheitskriterium, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ ein Skalarprodukt ist.

(b) Finden Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$ bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ und geben Sie (mit Begründung) die zugehörige Fundamentalmatrix an.

In den nächsten Aufgaben möchten wir Aussagen über Orthogonalität für nicht unbedingt positiv-definite, symmetrische Bilinearformen verallgemeinern.

Ab jetzt sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Sei $W\subseteq V$ ein Untervektorraum. Wir definieren $W^\perp := \{v\in V \mid \forall w\in W : \langle v,w\rangle = 0\}$ das orthogonale Komplement von W.

(a) Zeigen Sie, dass $W^\perp$ ein Untervektorraum von V ist.

(b) Sei nun $U\subseteq W$ ein weiterer Untervektorraum von V. Zeigen Sie, dass $W^\perp\subseteq U^\perp$.

Wir nennen eine symmetrische Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to K$

- *nichtausgeartet*, wenn gilt

$$\langle x,y\rangle = 0 \text{ für alle } y\in V \Rightarrow x = 0,$$

- *ausgeartet*, wenn sie nicht nichtausgeartet ist, und
- *anisotrop*, wenn für alle $v\in V\backslash\{0\}$ gilt, dass $\langle v,v\rangle\neq 0$.
- für $K=\mathbb{R}$ *positiv-definit* (analog. *negativ-definit*), falls $\langle v,v\rangle > 0$ (analog $\langle v,v\rangle < 0$) für alle $v\in V\backslash\{0\}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie folgende Implikationen

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ ist ein Skalarprodukt} \Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ ist anisotrop} \Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ ist nichtausgeartet}$$

(b) Geben Sie ein Beispiel einer anisotropen Bilinearform, die kein Skalarprodukt ist.

(c) Geben Sie ein Beispiel einer nichtausgeartetetn Bilinearform, die nicht anisotrop ist.

(d) Sei $K = \mathbb{R}$. Zeigen Sie dass, eine symmetrische Bilinearform anisotrop genau dann, wenn Sie entweder positiv oder negativ definit ist.

Aus der Vorlesung wissen wir, dass es für jeden Unterraum $U \subset V$ gilt, dass $V = U \oplus U^{\perp}$, falls $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist. Wir wollen im folgenden nun zeigen, dass die gleiche Aussage gilt, wenn $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *nur* nichtausgeartet ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei V endlich-dimensional und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Einschränkung $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{U \times U} : U \times U \to K, (u_1, u_2) \mapsto \langle u_1, u_2 \rangle$ ist genau dann nichtausgeartet, wenn $U \cap U^{\perp} = \{0\}$.

(b) Es gilt: $\dim(U^{\perp}) \geq \dim(V) - \dim(U)$.

(c) Die Einschränkung $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{U \times U}$ wie in (a) ist genau dann nichtausgeartet, wenn $V = U \oplus U^{\perp}$ gilt.

(d) Folgern Sie, dass eine symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ anisotrop ist, genau dann wenn für beliebigen Unterraum $U \subset V$ gilt, dass $V = U \oplus U^{\perp}$.

Als letztes wollen wir *Satz 1.16 (Gram-Schmidt)* aus dem Skript verallgemeinern.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Sei V ein Vektorraum mit anisotroper Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Zeigen Sie, dass es zu jeder Basis $B = \{b_1, ..., b_n\}$ von V eine Orthogonalbasis $\{c_1, ..., c_n\}$ gibt mit

$$[c_1, ..., c_r] = [b_1, ..., b_r]$$

für alle $r = 1, ..., n$.

Abgabe bis Beginn der Vorlesung um **10:15** am **Montag, den 02. Mai**.