Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2022
19. April 2022

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. Martin Möller
Jeonghoon So
Johannes Schwab

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und sei $\mathbb{R}[x]_{\leq d} = \{P \in \mathbb{R} \mid \deg(P) \leq d\}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[x]_{\leq d} \times \mathbb{R}[x]_{\leq d} &\to \mathbb{R} \\ \langle P, Q \rangle &\mapsto \int_a^b P(x)Q(x)dx \end{aligned}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}[x]$ definiert.

(b) Bestimmen Sie für $a = 0$ und $b = 1$ die Fundamentalmatrix von $\langle\ ,\ \rangle$ für $d = 2$ bzgl. der Basis $B = \{1, x, x^2\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine Bilinearform $F\colon V \times V \to K$ heißt *antisymmetrisch*, falls für alle $v, w \in V$ gilt: $F(v, w) = -F(w, v)$.

Sei G die Matrixdarstellung der Bilinearform F. Zeigen Sie:

(a) G ist symmetrisch, genau dann wenn F symmetrisch ist.

(b) G ist antisymmetrisch, genau dann wenn F antisymmetrisch ist.

(c) Für $K = \mathbb{C}$ ist G hermitesch, genau dann wenn F hermitesch ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Seien $a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen mit $a_1 + \cdots + a_n = 1$. Zeigen Sie, dass $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geq \frac{1}{n}$.

(b) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und sei $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\| = 1\}$ die Einheitssphäre. Bestimmen Sie

$$\max\{ax + by + cz \mid (x, y, z) \in S_2\}.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beweisen Sie Proposition 1.12 im Skript, d.h. beweisen Sie die folgende Aussage:

Auf einem normierten Vektorraum V gibt es ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ mit $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ genau dann, wenn die Norm die Parallelogrammidentität erfüllt. In diesem Fall ist das Skalarprodukt gegeben durch

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2)$$

im reellen Fall bzw. durch

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2) + \frac{i}{4}(\|v+iw\|^2 - \|v-iw\|^2)$$

im komplexen Fall.

Abgabe bis Beginn der Vorlesung um **10:15** am **Montag, den 25. April**.