Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2022
18. April 2022

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. Martin Möller
Jeonghoon So
Johannes Schwab

Übungsblatt 0

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$H_0 : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \ \ ((\alpha_1, ..., \alpha_n), (\beta_1, ..., \beta_n)) \mapsto \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot \overline{\beta_j}$$

aus Beispiel 1.6 im Skript hermitisch ist.

Aufgabe 2

Entscheiden Sie, ob es sich jeweils um eine Bilinearform über $\mathbb{R}$ handelt, und bestimmen Sie ggf. die Fundamentalmatrix bzgl. der Standardbasen.

(a) $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) \mapsto x_1 - x_2 + 2y_1 + y_2.$

(b) $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) \mapsto x_1x_2 - 2y_1y_3 + 3y_2y_3.$

(c) $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) \mapsto 3x_1y_1 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3.$

Aufgabe 3

Zeigen Sie dass $(\mathbb{R}^3, F)$ mit

$$F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) \mapsto x_1y_1 + 2y_2x_2 + 3x_3y_3$$

ein euklidischer Vektorraum ist.

Aufgabe 4

Sei $(\mathbb{R}^3, F)$ (wie in Aufgabe 3) ein euklidischer Vektorraum. Berechnen Sie alle (sechs) möglichen Winkel zwischen den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$