DEDEKIND-WEBER-ÄQUIVALENZ UND DER VERGLEICH VON GLATTEN MIT REGULÄREN SCHEMATA

JARO EICHLER

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Separierte Schemata von endlichem Typ über einem beliebigen Körper verhalten sich ähnlich wie solche über algebraisch abgeschlossenen Körpern. In meiner Arbeit werde ich einige Gemeinsamkeiten und Unterschiede darstellen.

Kapitel 2 dient der Erinnerung an einige Begriffe und Aussagen über Schemata. So korrespondieren Morphismen in den projektiven Raum zu Geradenbündeln, welche von globalen Schnitten erzeugt werden. Außerdem wird definiert, was unter einer Kurve verstanden werden soll.

In Kapitel 3 werden Bewertungsringe genauer betrachtet. Das erste wichtige Resultat im dritten Kapitel ist eine Charakterisierung von Bewertungsringen in Körpern. Und zwar, dass Bewertungsringe genau diejenigen lokalen Unterringe von dem Körper sind, welche bezüglich Dominanz maximal sind. Für Kurven sind vor allem diskrete Bewertungsringe interessant, also die Bewertungsringe zu Bewertungen mit Wertegruppe $\mathbb{Z}$. Das zweite wichtige Resultat ist, dass für eine endliche Körpererweiterung des Quotientenkörpers eines Dedekindrings der ganze Abschluss wieder ein Dedekindring ist.

Kapitel 4 ist den Kurven gewidmet. Bei einer regulären, zusammenhängenden Kurve entsprechen die Halme in den abgeschlossenen Punkten gerade diskreten Bewertungsringen des Funktionenkörpers der Kurve. Die Punkte sind sogar schon eindeutig durch den zugehörigen diskreten Bewertungsring bestimmt. Andererseits ist, mit der richtigen Topologie und Garbe versehen, die Menge aller diskreten Bewertungsringe $C_{L/K}$, eines eindimensionalen Funktionenkörpers L/K, selbst wieder eine reguläre, zusammenhängende Kurve. Durch eine Fortsetzungseigenschaft von Morphismen von Kurven in projektive Schemata sieht man, dass $C_{L/K}$ sogar schon projektiv ist. Damit kann man die Dedekind-Weber-Äquivalenz beweisen. Diese sagt aus, dass die Kategorie der zusammenhängenden, regulären, eigentlichen Kurven mit dominanten Morphismen gleich der Kategorie der eindimensionalen Funktionenkörper ist.

Bis hierhin ist es nahezu irrelevant, ob man sich über einem beliebigen oder algebraisch abgeschlossenen Körper befindet. Wenn man jedoch von Glattheit und Regularität redet, muss man durchaus dazwischen differenzieren. So entsprechen sich die Begriffe bei Varietäten über algebraisch abgeschlossenen Körpern. Über nicht perfekten Körpern gilt im Allgemeinen nur, dass aus Glattheit Regularität folgt. Das zeigt zum Beispiel die Kurve $\operatorname{Spec} K[X,Y]/(Y^2 - f(X))$, wobei f ein über K inseparables, irreduzibles Polynom ist. Die Theorie dahinter wird auf die Kähler-Differentiale zurückgeführt. Weiter lässt sich die Dedekind-Weber-Äquivalenz dann folgendermaßen ergänzen

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Kurve}/K\\ \text{zusammenhängend, regulär, eigentlich}\\ \text{(+ generisch glatt)}\end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}L/K\\ \text{eindimensionaler Funktionenkörper}\\ \text{(+ separabel)}\end{array}\right\}.$$

Ich danke Prof. Dr. Jakob Stix für die Möglichkeit in seinem Fachbereich eine Abschlussarbeit zu schreiben, für das interessante Thema und für seine tatkräftige Unterstützung. Weiterhin danke ich allen, die sich die Zeit genommen haben auf meine Fragen einzugehen.

2. Schemata und kohärente Garben

Der Begriff des Schemas erweitert die klassische Vorstellung einer Varietät über einem abgeschlossenen Körper, der Nullstellenmenge von Polynomen. Ein affines Schema ist das Spektrum eines Ringes zusammen mit der Zariski-Topologie. Durch die vom Ring geerbte Strukturgarbe ist dies ein lokal geringter Raum. In dem Sinne sei ein Schema ein lokal geringter Raum, sodass es eine Überdeckung von affinen Schemata gibt.

Beispiel 2.1. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, dann entsprechen die Primideale von $K[x,y]/(x^2-y)$ den Punkten in $\mathbb{A}^2_K$, welche die Gleichung $x^2 = y$ erfüllen und einem weiteren Punkt, dem (0)-Ideal.

Zunächst einige Begriffe, welche ich im Laufe der Arbeit verwenden werde.

Schema X über einem Schema Y: Dies ist ein Morphismus $X \to Y$ von Schemata. Falls $Y = \mathrm{Spec}(R)$ ist, sagt man auch einfach, dass X ein Schema über R ist.

Projektives Schema: Ein Schema X über einem Ring R heißt projektiv, falls es eine abgeschlossene Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_R$ für ein n gibt und diese mit den jeweiligen Morphismen nach R kommutiert.

Irreduzibel: Ein Schema X heißt irreduzibel, falls es sich nicht als echte Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen schreiben lässt. Ist es weiter generisch reduziert, so ist der Halm $\mathcal{O}_{X,\eta}$ der Strukturgarbe am generischen Punkt η ein Körper. Dieser wird Funktionenkörper von X genannt und mit $\mathrm{K}(X)$ bezeichnet.

Regulär: Ein Schema heißt regulär, falls alle Halme der Strukturgarbe reguläre lokale Ringe sind. Reguläre lokale Ringe sind noethersche lokale Ringe, sodass das maximale Ideal von Dimension vielen Elementen erzeugt werden kann. Zudem sind diese faktoriell, also insbesondere Integritätsringe.

Endlicher Typ: Sei X ein Schema über einem Ring R. Man nennt X von endlichem Typ, falls es eine endliche affine Überdeckung von X gibt, sodass die zugehörigen R-Algebren über R endlich erzeugt sind. Für Schemata über einem Körper von endlichem Typ gilt damit, dass diese noethersch sind nach dem Hilbertschen Basissatz.

Definition 2.2. Eine Kurve ist ein eindimensionales, separiertes Schema von endlichem Typ über einem Körper.

Sei X ein Schema über einem Ring R und $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel über X. Man wähle $s_0, \dots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ und setze $U_s = \{P \in X |\, s_i(P) \neq 0 \text{ für ein } i\}$. Dann definiert dies eine Zuordnung

$$\begin{aligned} X \supset U_{\bar{s}} &\to \mathbb{P}^n_R \\ P &\mapsto [s_0(P) : \dots : s_n(P)]. \end{aligned}$$

Dies ist so zu verstehen, dass die Schnitte durch lokale Trivialisierungen in den Punkten Elemente der Halme der Strukturgarbe sind. Andererseits induziert ein Morphismus $\varphi : X \to P^n_R$ das Geradenbündel

$$\varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1) \text{ und Schnitte } \varphi^* x_0, \dots, \varphi^* x_n.$$

Dies führt zu folgendem Satz, welcher Morphismen in den projektiven Raum beschreibt.

Satz 2.3. *Sei X ein Schema über einem Ring R und $n \in \mathbb{N}$. Es stehen in Bijektion*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(X, \mathbb{P}^n_R) \simeq \{(\mathcal{L}, s_0, \dots, s_n) |\, &\mathcal{L} \text{ Geradenbündel über } X \\ &s_0, \dots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L}) \text{ mit } U_s = X\} / \sim . \end{aligned}$$

Wobei $(\mathcal{L}, s_0, \dots, s_n) \sim (\mathcal{G}, r_0, \dots, r_n)$ falls es einen Isomorphismus $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{G}$ gibt, sodass gilt $\varphi(s_i) = r_i$.

Beweis. Siehe [Vak15, Thm. 16.4.1.]. □

Lemma 2.4. *Seien U, X, Y Schemata über einem Ring R und Y/R separiert. Sei $U \to X$ ein dominanter Morphismus und $\varphi : U \to Y$ ein Morphismus. Dann existiert höchstens eine Fortsetzung von φ auf X.*

Beweis. Seien $\varphi_1, \varphi_2 : X \to Y$ zwei Fortsetzungen. Dies führt zur Frage ob es eine Abbildung ψ gibt, sodass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, hook, "\triangle"] \\ X \arrow[r, "(\varphi_1,\varphi_2)"'] \arrow[ur, dashed, "\exists\psi"'] & Y \times_R Y. \end{tikzcd}$$

Mit $Z = Y \times_{Y \times_R Y} X$ führt dies zu dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[dr] & Z \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, hook, "\iota"] & Y \arrow[d, hook, "\triangle"] \\ & X \arrow[r] & Y \times_R Y. \end{tikzcd}$$

Da Y separiert ist, ist die Diagonale $\triangle$ eine abgeschlossene Einbettung. Nach [Liu02, Ch. 3 Proposition 1.23.] ist auch ι eine abgeschlossene Einbettung. Also ist das Bild unter ι abgeschlossen und enthält U. Letzteres liegt dicht in X, daher ist ι ein Isomorphismus. Setze $g = p_Y \circ \iota^{-1}$. □

Nun noch eine Aussage, welche von Halmen auf Umgebungen schließen lässt und im letzten Kapitel bei Differentialformen Anwendung findet. Dazu erstmal:

Lemma 2.5. *Sei X ein Schema, $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf X und $\mathcal{F}_P = 0$ für einen Punkt $P \in X$. So gibt es eine offene Umgebung $U \subset X$ von P, sodass $\mathcal{F} \restriction_U = 0$ ist.*

Beweis. Da die Frage nach einer Umgebung lokal ist, nehme man ohne Einschränkung an, dass $X = \operatorname{Spec} A$ affin ist und $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ die assoziierte Garbe zu einem A-Modul M ist. Da $\mathcal{F}$ kohärent ist, ist M endlich erzeugt. Seien $y_1, ..., y_n$ Erzeuger. Im Punkt P ist $y_i \restriction_P = 0$, daher gibt es offene Umgebungen U_i von P, sodass $y_i \restriction_U = 0$ gilt. Man wähle eine Umgebung $\mathrm{D}(f) \subset \bigcap U_i$ von P. Dann wird $\mathcal{F} \restriction_{\mathrm{D}(f)} = \widetilde{M_f}$ von $y_i \restriction_{\mathrm{D}(f)} = 0$ erzeugt. Also ist $\mathrm{D}(f)$ die gesuchte Menge. □

Korollar 2.6. *Sei X ein lokal noethersches Schema, $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf X und $P \in X$ so gewählt, dass $\mathcal{F}_P$ frei von Rang k über $\mathcal{O}_P$ ist. Dann gibt es eine offene Umgebung U von x, sodass $\mathcal{F} \restriction_U$ frei von Rang k ist.*

Beweis. Sei eine Basis von $\mathcal{F} \restriction_P$ gegeben durch $x_1, ..., x_k$. Seien weiter U_i Umgebungen von P und $\tilde{x}_i \in \mathcal{F}(U_i)$, sodass eingeschränkt in P gilt $\tilde{x}_i \restriction_P = x_i$. Da die Frage nach einer Umgebung lokal ist, setze man ohne Einschränkung $X = \bigcap U_i$. Dann definiert

$$\begin{aligned} \varphi(U) : \ \mathcal{O}_X^k(U) &\to \mathcal{F}(U) \\ (f_1, ..., f_n) &\mapsto \sum f_i(\tilde{x}_i \restriction_U) \end{aligned}$$

einen Morphismus der in P ein Isomorphismus ist. Da sowohl $\mathcal{O}_X^k$, als auch $\mathcal{F}$ kohärent sind, sind *$ker\varphi$* und *$coker\varphi$* kohärent; siehe [Liu02, Proposition 5.1.12.]. Nach Lemma 2.5 gibt es eine Umgebung U von P auf der φ ein Isomorphismus ist. □

3. Bewertungsringe

Die folgenden zwei Kapitel orientieren sich an [Har77, Ch. 1.6. Nonsingular Curves]. Anstelle eines algebraisch abgeschlossenen Körpers wird jedoch ein beliebiger Basiskörper gewählt.

Definition 3.1. Sei R ein Integritätsring mit Quotientenkörper K, dann heißt R Bewertungsring von K, falls für alle $x \in K^\times$ gilt

$$x \in R \text{ oder } x^{-1} \in R.$$

Für einen Bewertungsring R von K ist $\mathrm{Quot}(R) = K$. Offensichtlich gibt es eine Einbettung von $\mathrm{Quot}(R) \subset R$. Hier gilt Gleichheit, da für $x \in K^\times$ folgt, dass x oder $x^{-1} \in \mathrm{Quot}(R)$ ist. Mit dem einem liegt auch das andere in $\mathrm{Quot}(R)$, da beide Elemente invertierbar sind.

Beispiel 3.2. Für einen beliebigen Körper K ist K selbst ein Bewertungsring.

Beispiel 3.3. Sei K ein Körper und $K(x)$ ein rationaler Funktionenkörper, dann ist $K[x]_{(x)}$ ein Bewertungsring.

Man kennt vielleicht Bewertungsringe eher als Ringe von Bewertungen, die Definitionen sind aber äquivalent. Sei $\upsilon : K^\times \to G$ eine Bewertung mit Bewertungsring R_υ. Für $x \in K^\times$ folgt, dass $\upsilon(x) \geq 0$ oder $\upsilon(x^{-1}) = -\upsilon(x) \geq 0$ gilt und damit $x \in R_\upsilon$ oder $x^{-1} \in R_\upsilon$ ist.

Sei andererseits nun R ein Bewertungsring wie in Definition 3.1, dann wird eine Bewertung auf K wie folgt definiert:

$$G = K^\times / R^\times \text{ und } \upsilon_R : K^\times \to G \text{ gegeben durch die Projektion.}$$

Man definiere eine Ordnung auf G durch

$$[x] \geq [y] :\Leftrightarrow xy^{-1} \in R.$$

Lemma 3.4. *Sei R ein Bewertungsring mit Quotientenkörper K, dann gilt:*

(1) *R ist ein lokaler Ring.*
(2) *R ist normal.*
(3) *Falls S ein weiterer Ring ist mit $R \subset S \subset K$, so ist S schon ein Bewertungsring von K.*

Beweis.

(1) Es reicht zu zeigen, dass $\mathfrak{m} = R \setminus R^\times$ ein Ideal ist. Ist dies der Fall, so ist dies das einzige maximale Ideal, also R lokal. Sei $a \in R$, $x \in \mathfrak{m}$. Nach der Definition von $\mathfrak{m}$ ist $a(ax)^{-1} = x^{-1} \notin R$, also $(ax)^{-1} \notin R$ und damit $ax \in \mathfrak{m}$. Sei nun $x, y \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$. Da R ein Bewertungsring ist, gilt
$$xy^{-1} \in R \text{ oder } (xy^{-1})^{-1} = x^{-1}y \in R.$$
Sei ohne Einschränkung ersteres der Fall, so folgt
$$y + x = (1 + xy^{-1})y \in \mathfrak{m}.$$

(2) Sei $x \in K$ ganz über R, d.h. es gibt ein normiertes Polynom
$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = 0 \text{ mit } a_i \in R.$$
Da R ein Bewertungsring ist, liegt x oder x^{-1} in R. Wir wollen zeigen, dass immer ersteres der Fall ist. Gilt $x^{-1} \in R$, so ist
$$x = x^{1-n}x^n = x^{1-n}(-(a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0)) = -(a_{n-1} + ... + a_0x^{1-n}) \in R.$$

(3) Der Quotientenkörper von S ist auch K, der Rest ist nach Definition ersichtlich. □

Sei K nun ein Körper, Ω ein algebraisch abgeschlossener Körper und Σ die Menge der Paare (R, f) mit R einem Unterring von K und $f : R \to \Omega$ einem Homomorphismus. Man betrachte folgende induktive Ordnung auf Σ:

$$(R, f) \leq (S, g) :\Leftrightarrow R \subset S \text{ und } g\restriction_R = f.$$

Nach Zorn's Lemma gibt es daher maximale Elemente in Σ, falls jenes nicht leer ist.

Lemma 3.5. *Sei (R, f) ein maximales Element von Σ, dann ist R lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = \ker f$.*

Beweis. Das Ideal $\mathfrak{m} = \ker f$ ist als Urbild der 0 prim, da Ω als Körper ein Integritätsring ist. Für $x \in R \setminus \mathfrak{m}$ folgt $f(b) \in \Omega^\times$, also faktorisiert f über

$$f_\mathfrak{m} : R_\mathfrak{m} \to \Omega.$$

Da R selbst ein Integritätsring ist, ist $R \subset R_\mathfrak{m} \subset \mathrm{Quot}(R)$ und $f_\mathfrak{m}$ setzt nach Konstruktion f fort. Aus der Maximalität folgt nun schon $R = R_\mathfrak{m}$, anders ausgedrückt gilt $R^\times = R \setminus \mathfrak{m}$ und daher ist $\mathfrak{m}$ maximal. □

Sei R ein Ring und I ein Ideal von R. Sei R ein Unterring von einem Ring S und $x \in R$. Dann definieren wir $R[x]$ als den von R und x erzeugten Unterring von S. Außerdem setzen wir $\mathfrak{m}[x] = \mathfrak{m}R[x]$ als das von $\mathfrak{m}$ erzeugte Ideal in $R[x]$.

Lemma 3.6. *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, K ein Körper mit $R \subset K$ und $x \in K^\times$, dann ist*

$$\mathfrak{m}[x] \neq R[x] \textit{ oder } \mathfrak{m}[x^{-1}] \neq R[x^{-1}].$$

Beweis. Angenommen beides gilt nicht, dann gibt es Gleichungen

$$u_r x^r + \ldots + u_0 = 1 \text{ und } v_k x^{-k} + \ldots + v_0 = 1 \text{ mit } u_i, v_j \in \mathfrak{m}.$$

Seien dabei r, k minimal gewählt und ohne Einschränkung $r \geq k \geq 1$. Es folgt

$$v_k x^{-k} + \ldots + v_1 x^{-1} = 1 - v_0$$

und durch die Multiplikation mit x^k ergibt sich

$$v_1 x^{k-1} + \ldots + v_k = (1 - v_0)x^k.$$

Da $1 - v_0 \notin \mathfrak{m}$ ist und $R^\times = R \setminus \mathfrak{m}$ gilt, folgt, dass $1 - v_0$ eine Einheit ist. Mit $w_i = \frac{[v_i]}{1-v_0} \in \mathfrak{m}$ lässt sich die Gleichung schreiben als

$$x^k = w_1 x^{k-1} + \ldots + w_k.$$

Damit kann man in der ersten Gleichung x^r durch einen Ausdruck mit niedrigeren Potenzen von x ersetzen, was einen Widerspruch zur Minimalität von r darstellt. □

Satz 3.7. *Ist (R, f) ein maximales Element von Σ, dann ist R ein Bewertungsring von K.*

Beweis. Nach Lemma 3.5 ist R lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = \ker f$. Sei $x \in K^\times$. Mit Lemma 3.6 ergibt sich

$$\mathfrak{m}[x] \neq R[x] \text{ oder } \mathfrak{m}[x^{-1}] \neq R[x^{-1}].$$

Sei ohne Einschränkung ersteres der Fall. Demnach gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}' \in R[x]$, welches über $\mathfrak{m}[x]$ liegt. Folglich ist $\mathfrak{m}' \cap R = \mathfrak{m}$. Die Inklusion $R \hookrightarrow R[x]$ induziert also eine Einbettung

$$k = R/\mathfrak{m} \hookrightarrow R[x]/\mathfrak{m}' =: k', \text{ wobei } k' = k[x + \mathfrak{m}'] \text{ ist.}$$

Nach [AM69, Kor. 5.24] ist k'/k endlich algebraisch. Da $\mathfrak{m}$ dem Kern von f entspricht, faktorisiert f über k und da Ω algebraisch abgeschlossen ist, gibt es eine Fortsetzung $f' : k' \to \Omega$. Die Verknüpfung

$$R[x] \to k' \xrightarrow{f'} \Omega$$

setzt f fort. Also folgt aus der Maximalität von (R, f), dass $R = R[x]$ ist. Anders ausgedrückt heißt das, dass x in R liegt. □

Betrachtet man nun für einen Körper K die Menge Σ aller lokalen Unterringe von K. Und seien $(R, \mathfrak{m}), (S, \mathfrak{m}') \in \Sigma$, dann sagt man, dass R von S dominiert wird, falls $R \subset S$ und $\mathfrak{m}' \cap R = \mathfrak{m}$ gilt.

Korollar 3.8. *Die maximalen Elemente, bezüglich Dominanz, von Σ entsprechen den Bewertungsringen von K. Über einem gegebenen lokalen Unterring von K gibt es solche.*

Beweis. Die Ergänzung folgt aus dem Lemma von Zorn, Dominanz ist eine induktive Ordnung. Für den ersten Teil reicht es zu zeigen, dass ein algebraisch abgeschlossener Körper Ω existiert, sodass maximale Elemente auch maximal im Sinne von Satz 3.7 sind. Und dass Bewertungsringe in Σ maximal sind.

Sei also $(R, \mathfrak{m})$ maximal, $k = R/\mathfrak{m}$, $k \hookrightarrow \bar{k}$ ein algebraischer Abschluss und

$$f : R \xrightarrow{pr} k \hookrightarrow \bar{k}.$$

Sei nun bezüglich $\bar{k}$ und der vorherigen Relation (S, g) maximal über (R, f). Dann ist S lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{n} = \ker g$. Es folgt

$$\mathfrak{m} = \ker f = \ker g\restriction_R = \ker g \cap R = \mathfrak{n} \cap R.$$

Folglich wird $(R, \mathfrak{m})$ von $(S, \mathfrak{n})$ dominiert und es gilt schon $R = S$.

Sei nun R ein Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und $(S, \mathfrak{n})$ über $(R, \mathfrak{m})$ bezüglich Dominanz maximal. Angenommen $R \subsetneq S$, dann gibt es ein $x \in S$, welches nicht in R liegt. Also ist $x^{-1} \in R$ (sogar in $\mathfrak{m}$), folglich auch $x^{-1} \in S$ (sogar in $\mathfrak{n}$). Damit ist

$$x^{-1} \in S^\times \cap \mathfrak{n} = \emptyset.$$

Demnach gilt Gleichheit und $(R, \mathfrak{m})$ ist selbst maximal. □

Sei nun L/K eine Körpererweiterung. Eine K-Bewertung v auf L ist solch eine, dass $v(x) = 0$ für alle $x \in K$ gilt. In der Sprache von 3.1 ist dies ein Bewertungsring R von L, sodass K in R enthalten ist. Offensichtlich übertragen sich die Aussagen von davor auch auf solche Bewertungen.

Definition 3.9.

(1) Eine Bewertung mit Werten in $\mathbb{Z}$ heißt diskrete Bewertung und der zugehörige Bewertungsring heißt diskreter Bewertungsring (abgekürzt DVR).
(2) Zu einer gegebenen Körpererweiterung L/K bezeichnen wir mit $C_{L/K}$ alle diskreten K-Bewertungsringe von L.
(3) Sei $R \in C_{L/K}$, so benennen wir das maximale Ideal von R mit $\mathfrak{m}_R$ und die zu R gehörige diskrete Bewertung mit v_R.

Satz 3.10. *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Integritätsring von Dimension 1, dann sind äquivalent:*

(1) *R ist ein diskreter Bewertungsring.*
(2) *R ist ein normaler Ring.*
(3) *R ist ein regulärer Ring.*
(4) *$\mathfrak{m}$ ist ein Hauptideal.*

Beweis. Siehe [AM69, Prop. 9.2.]. □

Definition 3.11. Ein Dedekindring ist ein eindimensionaler, normaler, noetherscher Integritätsring.

Sei nun R ein Dedekindring und $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(R)$ ein Primideal, dann ist auch $R_\mathfrak{P}$ ein Dedekindring. Also ist $R_\mathfrak{P}$ nach Satz 3.10 ein diskreter Bewertungsring.

Satz 3.12. *Sei R ein Integritätsring, dann sind äquivalent*

(1) *R ist ein Dedekindring.*
(2) *Jedes gebrochene Ideal von R ist invertierbar.*

Beweis. Siehe [AM69, Thm. 9.8.]. □

Satz 3.13. *Sei R ein Dedekindring mit Quotientenkörper K und L/K eine endliche Körpererweiterung. Dann ist der ganze Abschluss von R in L ein Dedekindring mit Quotientenkörper L.*

Beweis. Für L/K separabel siehe [JCJ06, Ch. X Satz 2.3.]. Für den allgemeinen Fall betrachte man $L/L_S/K$ mit L_S/K separabel und L/L_S rein inseparabel. Sei R_S der ganze Abschluss von R in L_S, dann ist dieser nach dem separablen Fall ein Dedekindring. Wir bezeichnen mit $\bar{R}$ den ganzen Abschluss von R in L. Dieser ist gleich dem ganzen Abschluss von R_S in L. Ein über R_S ganzes Element $x \in L$

hat ein Ganzheitspolynom mit Koeffizienten aus R_s. Die Koeffizienten sind ganz über R. Mit der Charakterisierung, dass über R ganze Elemente $r \in L$ gerade diejenigen Elemente sind, sodass $R[r]$ ein endlicher R-Modul ist, folgt die Gleichheit. Folglich können wir ohne Einschränkung annehmen, dass L/K rein inseparabel ist.

Sei nun $x \in \bar{R}$ mit Minimalpolynom $P_{x/K}$, dann ist

$$P_{x/K} = T^{p^r} - a \text{ für ein } r \in \mathbb{N},\ a \in K,\ p = char(K) \text{ und } p^r \leq [L : K].$$

Da x ganz über R ist, folgt $a \in R$, siehe [JCJ06, Ch. X Satz 1.7.]. Für r groß genug gilt dann, da L/K endlich erzeugt ist, $\bar{R} = \{x \in L |\, x^{p^r} \in R\}$. Sei $q = p^r$, $M = \sqrt[q]{K}$, so ist $()^q : M \to K$ ein Isomorphimus. Bezeichne das Urbild von R mit S, dies sind alle Elemente $x \in M$ für die gilt $x^q \in R$. Insbesondere ist S isomorph zu R, somit ist S ein Dedekindring.

Nach Satz 3.12 reicht es zu zeigen, dass jedes gebrochene Ideal in $\bar{R}$ invertierbar ist. Sei I ein gebrochenes Ideal von $\bar{R}$. Nach der vorherigen Beschreibung von $\bar{R}$ ist $\bar{R} \subset S$, also SI ein gebrochenes Ideal von S. Dieses ist daher invertierbar, es gibt also $s_i \in (S : SI)$ und $a_i \in I$ mit $\sum s_i a_i = 1$. Potenzieren mit q ergibt

$$1 = (\sum s_i a_i)^q = \sum s_i^q a_i^q = \sum a_i (a_i^{q-1} s_i^q).$$

Da die s_i in M enthalten sind, liegt $s_i^q \in K \subset L$. Man definiere $b_i = a_i^{q-1} s_i^q$, so folgt aus $s_i I \subset S$, dass

$$b_i I \subset s_i^q I^q \subset S, \text{ also } b_i I \subset S \cap L = \bar{R}.$$

Damit ist $b_i \in (\bar{R} : I)$ und wegen $\sum b_i a_i = 1$ gilt

$$(\bar{R} : I)I = \bar{R}.$$

□

Lemma 3.14. *Sei K ein Körper und A eine endlich erzeugte K-Algebra mit Quotientenkörper M. Sei L/M eine endliche Körpererweiterung, so ist der ganze Abschluss B von A in L eine endlich erzeugte K-Algebra. Genauer ist B endlich über A.*

Beweis. Siehe [Eis95, Thm. 4.14.]. □

Lemma 3.15. *Sei L/K eine Körpererweiterung, v eine K-Bewertung auf L und $x \in L^\times$ algebraisch über K, dann ist $v(x) = 0$.*

Beweis. Sei $P_{x/K} = a_n T^n + ... + a_0$ das Minimalpolynom von x. Dann ist $a_0 \neq 0$. Es ergibt sich folgende Gleichung

$$0 = v(a_0) = v(\sum_1^n a_i x^i) \geq \min_{1,\dots,n}\{(\underbrace{v(a_i)}_{=0} + iv(x))\} = v(x).$$

Analog

$$0 \geq v(x^{-1}) = -v(x)$$

und somit $v(x) = 0$. □

4. Kurven und diskrete Bewertungsringe

Definition 4.1. Sei K ein Körper. Einen Körper L/K nennt man Funktionenkörper von Dimension n, falls es eine Transzendenzbasis $(x_1, ..., x_n)$ von L gibt, sodass $L/K(x_1, ..., x_n)$ endlich algebraisch ist. Der relative algebraische Abschluss von K in L heißt Konstantenkörper.

Sei X ein reduziertes, irreduzibles K-Schema von Dimension n und endlichem Typ, so ist $\mathrm{K}(X)$ ein Funktionenkörper der Dimension n über K.

Lemma 4.2. *Sei L/K ein Funktionenkörper von Dimension 1, $x \in L$, dann ist die Menge*

$$\{R \in C_{L/K} \,|\, x \notin R\}$$

endlich.

Beweis. Sei $R \in C_{L/K}$, dann ist

$$x \notin R \Leftrightarrow x^{-1} \in \mathfrak{m}_R.$$

Es gilt also für $y \in L^\times$ zu zeigen, dass die Menge

$$\{R \in C_{L/K} \,|\, y \in \mathfrak{m}_R\}$$

endlich ist.

Sei y algebraisch über K, dann ist nach Lemma 3.15 die Bewertung $v(y) = 0$ für alle $v \in C_{L/K}$. In dem Fall ist die Menge leer.

Sei nun y transzendent über K. Dann ist $K[y]$ ein Polynomring in einer Variable, also ein Dedekindring und $L/K(y)$ endlich algebraisch. Damit ist nach Satz 3.13 auch der ganze Abschluss S von $K[y]$ in L ein Dedekindring. Sei weiter $y \in \mathfrak{m}_R$, es ist $K[y] \subset R$ und so auch $S \subset R$, da R ganz abgeschlossen in L ist nach Lemma 3.4. Sei $\mathfrak{P} = S \cap \mathfrak{m}_R$, dann ist $\mathfrak{P}$ maximal in S da $y \in \mathfrak{P}$ ist. Folglich ist $S_\mathfrak{P}$ ein diskreter Bewertungsring mit $S_\mathfrak{P} \subset R$. Mit Korollar 3.8 folgt hier Gleichheit. Daher reicht es zu zeigen, dass es über y in S nur endlich viele maximale Ideale gibt. Da S noethersch ist, liegen in der Menge

$$\{I \text{ Ideal in } S \,|\, \text{über } I \text{ liegen unendlich viele maximale Ideale}\}$$

nur Primideale. Da die Dimension von S eins beträgt, besteht die Menge nur aus (0). Damit ist das von y erzeugte Ideal nicht enthalten. $\square$

Wenn man von regulären Schemata spricht, dann sind diese genau dann irreduzibel, wenn sie zusammenhängend sind. Grund dafür ist, dass die lokalen Ringe Integritätsringe sind.

Korollar 4.3. *Sei L/K ein eindimensionaler Funktionenkörper und $R \in C_{L/K}$, dann gibt es eine zusammenhängende, reguläre, affine Kurve C über K mit $\mathcal{O}_{C,P} \cong R$ für ein $P \in C$ und $\mathrm{K}(C) = L$.*

Beweis. Für $R \neq L$ wähle man $0 \neq y \in \mathfrak{m}_R$, nach Lemma 3.15 ist y transzendent über K. Sei, wie in Lemma 4.2, S der ganze Abschluss von $K[y]$. Dann folgt $S_\mathfrak{P} = R$ für $\mathfrak{P} = S \cap \mathfrak{m}_R$. Wir setzen $C = \mathrm{Spec}(S)$. Dies ist nach Lemma 3.14 wirklich eine Kurve. Man wähle als P den zu $\mathfrak{P}$ korrespondierenden Punkt. Für $R = L$ nehme man sich irgendeine solche Kurve mit P dem generischen Punkt. $\square$

Sei L/K ein Funktionenkörper in einer Variablen. Erzeuge auf $C_{L/K}$ eine Topologie durch: abgeschlossene Mengen sind endliche Teilmengen, die L nicht enthalten. Ferner beschreibt

$$\mathcal{O}_{C_{L/K}}(U) = \bigcap_{R \in U} R$$

eine Prägarbe auf diesem Raum.

Lemma 4.4. *Diese Prägarbe ist eine Garbe und macht aus $C_{L/K}$ einen irreduziblen, lokal geringten Raum.*

Beweis. Sei $t \in L$ transzendent über K. Der Polynomring $K[t]$ besitzt unendlich viele maximale Ideale, welche diskreten K-Bewertungen von $K[t]$ entsprechen. Da $L/K(t)$ endlich ist, setzen diese sich, nicht notwendigerweise eindeutig, nach Satz 3.13 zu diskreten K-Bewertungen auf L fort. Dementsprechend ist $C_{L/K}$ eine unendliche Menge und mit der kofiniten Topologie irreduzibel. Seien nun $U_i \subset C_{L/K}$ offene, nichtleere Mengen, $U_{ij} = U_i \cap U_j$ und $U = \bigcup U_i$. Man betrachte die Sequenz

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{C_{L/K}}(U) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \prod_i \mathcal{O}_{C_{L/K}}(U_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, equal] & \prod_{i,j} \mathcal{O}_{C_{L/K}}(U_{ij}) \arrow[d, equal] \\
& \bigcap_{R \in U} R & \prod_i \bigcap_{R \in U_i} R & \prod_{i,j} \bigcap_{R \in U_{ij}} R.
\end{tikzcd}$$

Da die Restriktionen den Inklusionen von Unterringen von L entsprechen und die Schnitte U_{ij} nicht leer sind, ist die Sequenz exakt, also $\mathcal{O}_{C_{L/K}}$ eine Garbe. Die Inklusionen $\mathcal{O}_{C_{L/K}}(U) = \bigcap_{S \in U} S \hookrightarrow R$ für Umgebungen von R induzieren eine Injektion

$$\mathcal{O}_{C_{L/K},R} = \varinjlim_{R \in U} \mathcal{O}_{C_{L/K}}(U) = \varinjlim_{R \in U} \bigcap_{S \in U} S \overset{\iota}{\hookrightarrow} R.$$

Sei $x \in R$, so ist nach Lemma 4.2 die Menge $U = \{S \in C_{L/K} | \, x \in S\}$ eine offene Umgebung von R, folglich ι surjektiv. Damit ist der Halm $\mathcal{O}_{C_{L/K},R} = R$ ein lokaler Ring. $\square$

Definition 4.5. Eine abstrakte reguläre Kurve über einem Körper K ist eine offene Teilmenge von $C_{L/K}$ für einen eindimensionalen Funktionenkörper L. Ein Morphismus zwischen abstrakten regulären Kurven ist ein Morphismus lokal geringter Räume.

Sei C nun eine zusammenhängende, reguläre Kurve über einem Körper K und $P \in C$ ein abgeschlossener Punkt. Der Halm $\mathcal{O}_{C,P}$ ist ein regulärer lokaler noetherscher Integritätsring von Dimension 1, also nach dem vorherigen Kapitel ein diskreter Bewertungsring von $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{C,P}) = \mathrm{K}(C)$.

Lemma 4.6. *Sei K ein Körper und X/K ein separiertes, integres Schema von endlichem Typ und $P, Q \in X$, sodass $\mathcal{O}_{X,P} = \mathcal{O}_{X,Q}$ in $\mathrm{K}(X)$ gilt, dann folgt $P = Q$.*

Beweis. Sei $R = \mathcal{O}_{X,P} = \mathcal{O}_{X,Q}$, also insbesondere ist R ein Integritätsring. Man konstruiere Morphismen $f_P, f_Q : Spec(R) \to X$ wie folgt. Sei U eine affine Umgebung um P, so definieren wir f_P als den von $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,P}$ induzierten Morphismus. Man gehe analog für f_Q vor. Es kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}\,\mathrm{K}(X) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(R) \arrow[r] \arrow[ur, shift left, "f_Q"] \arrow[ur, shift right, "f_P"'] & \mathrm{Spec}\,K,
\end{tikzcd}$$

wobei $\mathrm{Spec}\,\mathrm{K}(X) \to \mathrm{Spec}\,R$ gegeben ist durch $R \hookrightarrow R_{(0)}$. Anders ausgedrückt setzen f_Q und f_P beide die Inklusion des generischen Punktes nach X fort. Der generische Punkt $\mathrm{Spec}\,\mathrm{K}(X)$ liegt dicht in $\mathrm{Spec}\,R$ und X/K ist als separiert angenommen. Gemäß Lemma 2.4 ist $f_P = f_Q$, folglich $P = Q$. $\square$

Für abgeschlossene Punkte reicht es sogar $\mathcal{O}_{X,P} \subset \mathcal{O}_{X,Q}$ vorauszusetzen um auf Gleichheit der Punkte zu schließen. Dafür setze man $R = \mathcal{O}_{X,Q}$ im Beweis von Lemma 4.6 und $f'_P = f_P \circ \pi$, wobei π der durch $R \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$ induzierte Morphismus ist.

Lemma 4.7. *Sei C eine zusammenhängende, reguläre Kurve über einem Körper K, dann gibt es eine abstrakte reguläre Kurve Y über K, sodass $C \cong Y$ ist.*

Beweis. Wir wählen $L = \mathrm{K}(C)$, dann ist $\mathcal{O}_{C,P} \in C_{L/K}$ für jedes $P \in C$ und für $Q \neq P$ gilt

$$\mathcal{O}_{C,P} \neq \mathcal{O}_{C,Q}.$$

Sei $Y = \{\mathcal{O}_{C,P} | \, P \in C\} \subset C_{L/K}$ und

$$\begin{aligned} \varphi : \; & C \to Y \\ & P \mapsto \mathcal{O}_{C,P}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.6 ist φ injektiv, daher bijektiv. Unter der Annahme, dass Y eine abstrakte reguläre Kurve ist, entsprechen offene Mengen von Y den offenen Mengen von C, in beiden Fällen handelt es sich um die kofinite Topologie. Sei also $U \subset C$ offen, dann ist

$$\mathcal{O}_Y(U) = \bigcap_{P \in U} \mathcal{O}_{C,P} = \mathcal{O}_C(U).$$

Es bleibt zu zeigen, dass Y eine offene Teilmenge von $C_{L/K}$ ist. Dafür reicht es zu zeigen, dass Y eine offene Teilmenge von $C_{L/K}$ enthält, dann ist das Komplement davon endlich, erst recht gilt dies auch für Y selbst.

Sei $U \subset C$ affin, also $U = \mathrm{Spec}(A)$ mit A einem noetherschen, eindimensionalem Integritätsring und als K-Algebra endlich erzeugt. Das Bild von U unter φ ist gegeben durch

$$\{A_{\mathfrak{P}} | \mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(A)\}$$

und es gilt $L = \mathrm{Quot}(A)$. Sei nun $R \in C_{L/K}$ mit $A \subset R$. Nach Korollar 3.8 gilt $A_{\mathfrak{P}} = R$. Mit Erzeugern $x_1, ..., x_n$ von A lässt sich das Bild unter φ damit folgendermaßen formulieren

$$\varphi(U) = \{R \in C_{L/K} | A \subset R\} = \bigcap_i \{R \in C_{L/K} | \, x_i \in R\}.$$

Diese Mengen sind offen, da die Mengen $\{R \in C_{L/K} | \, x_i \notin R\}$ nach Lemma 4.2 endlich sind. □

Korollar 4.8. *Eine abstrakte reguläre Kurve über einem Körper K ist eine zusammenhängende, reguläre Kurve über K.*

Beweis. Sei Y eine abstrakte reguläre Kurve und $R \in Y$, dann gibt es nach Korollar 4.3 eine Kurve C mit den obigen Eigenschaften, sodass $\mathcal{O}_{C,P} \cong R$ gilt. Weiter ist, nach Lemma 4.7, C isomorph zu einer offenen Teilmenge $U \subset C_{L/K}$, wobei $L = \mathrm{Quot}(R)$ ist. Damit folgt, dass $U \cap Y$ eine offene affine Umgebung um R ist. Es reicht nun zu zeigen, dass Y quasi-kompakt ist, dann ist Y von endlichem Typ, die gefundenen Kurven C sind dies ja. Ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ eine Überdeckung von $C_{L/K}$ und $U_j \neq \emptyset$, so ist $C_{L/K} \setminus U_j$ abgeschlossen und damit endlich. Sei diese endliche Menge gegeben durch $\{x_1, ..., x_r\}$, man wähle $U_{i_1}, ..., U_{i_r}$ mit $x_k \in U_{i_k}$, so folgt schon

$$C_{L/K} = U_j \cup U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_r}.$$ □

Lemma 4.9. *Sei Y eine abstrakte reguläre Kurve über einem Körper K, $R \in Y$ abgeschlossen und X ein projektives K-Schema, dann lässt sich jeder Morphismus $\varphi : Y \setminus \{R\} \to X$ eindeutig auf Y fortsetzen.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus Lemma 2.4. Man betrachte X eingebettet in $\mathbb{P}^n_K$ und sei $\bar{\varphi} : Y \to \mathbb{P}^n_K$ eine Fortsetzung von φ. Dies induziert nach [Liu02, Ch. 3 Proposition 1.23.] ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \setminus \{R\} \arrow[r] \arrow[dr] & X \otimes_{\mathbb{P}^n_K} Y \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, hook, "\iota"] & X \arrow[d, hook] \\ & Y \arrow[r, "\bar{\varphi}"] & \mathbb{P}^n_K. \end{tikzcd},$$

mit ι einer abgeschlossenen Einbettung. Da $Y \setminus \{R\}$ dicht in Y liegt ist ι somit ein Isomorphismus. Folglich liegt das Bild von $\bar{\varphi}$ schon in X. Wir können also ohne Einschränkung $X = \mathbb{P}^n_K$ annehmen. Nach Definition ist Y eine offene Teilmenge von $C_{L/K}$ für einen Körper L/K. Sei π eine Uniformisierende von R, so ist die Menge

$$Z = \{R \in C_{L/K} | \, \pi \notin R\}$$

nach Lemma 4.2 endlich, also abgeschlossen. Daher ist $U = Y \setminus Z$ eine offene Umgebung von R und es sei ohne Einschränkung $Y = U$. Ferner ist

$$W = \{R \in C_{L/K} | \, \pi \in \mathfrak{m}_R\}$$

nach Lemma 4.2 endlich, also $V = X \setminus W$ offen. Daher kann man ohne Einschränkung zu $Y = V \cup \{R\}$ übergehen. Es folgt, dass $v_R(\pi) = 1$ ist und $v_S(\pi) = 0$ für $R \neq S \in Y$ gilt.

Nach Satz 2.3 korrespondiert φ zu einem, bis auf Isomorphie eindeutigen, Geradenbündel L mit $n+1$ nicht gleichzeitig verschwindenden Schnitten $s_0, ..., s_n$ auf $Y \setminus \{R\}$. Sei U eine offene Umgebung um R, sodass

$$\psi : L \restriction_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_Y \restriction_U$$

eine lokale Trivialisierung von L ist. Sei

$$f_i = \psi \circ s_i,$$

dann ist φ auf U gegeben durch $(f_0, ..., f_n)$. Setze

$$N = \min_i v_R(f_i),$$

so definiere man $\bar{\varphi}$ auf U durch

$$(\pi^{-N} f_0, ..., \pi^{-N} f_n).$$

In R ist dies wohldefiniert und auf $Y \setminus \{R\}$ stimmt $\bar{\varphi}$ mit φ überein, da π in $\mathcal{O}^{\times}_{Y\setminus\{R\}}$ liegt. □

Lemma 4.10. *Sei C eine integre Kurve über einem Körper K. Dann ist die Menge der regulären Punkte C_{reg} in C offen und nichtleer.*

Beweis. Sei

$$\nu : X^{\nu} \longrightarrow X$$

die Normalisierung von X. Da die Konstruktion der Normalisierung affin statt findet, ist ν nach Lemma 3.14 endlich. Da X integer ist, gilt

$$C_{reg} = \{Q \in X | \ \mathcal{O}_{X,Q} \ \text{normal}\}$$

nach Satz 3.10. Die normalen Punkte in C entsprechen den Punkten in denen ν ein Isomorphismus ist. Dies entspricht wiederum dem Urbild unter ν des Ortes auf dem $\nu^{\#} : \ \mathcal{O}_{X^{\nu}} \to \nu_* \mathcal{O}_X$ ein Isomorphismus ist, da sich wegen der Endlichkeit von ν die Abbildung affin betrachten lässt. Es folgt

$$C_{reg} = \nu^{-1}(\{\ker \nu^{\#} = 0\} \cap \{\operatorname{coker} \nu^{\#} = 0\}).$$

Da ν endlich ist, ist $\nu_* \mathcal{O}_X$ kohärent. Lemma 2.5 angewandt auf $\ker \nu^{\#}$ und $\operatorname{coker} \nu^{\#}$ liefert, dass die Verschwindungsorte vom Kern bzw. Kokern offen sind. Zudem ist C_{reg} nicht leer, der Halm am generischen Punkt η ist regulär, also liegt η in der Menge. □

Korollar 4.11. *Sei C eine integre Kurve über einem Körper K, $P \in C$ ein abgeschlossener, regulärer Punkt und X ein projektives K-Schema. Dann lässt sich jeder Morphismus $\varphi : \ C \setminus \{P\} \to X$ eindeutig auf C fortsetzen.*

Beweis. Bei der Frage um die Fortsetzbarkeit reicht es, sich auf eine offene Umgebung von P zu beschränken. Sei U eine irreduzible Umgebung um P, dann ist U_{reg} nach Lemma 4.10 offen, also ohne Einschränkung $C = U_{reg}$. Nach Lemma 4.7 ist C eine abstrakte reguläre Kurve und Lemma 4.9 liefert die Lösung. □

Lemma 4.12. *Sei L/K ein eindimensionaler Funktionenkörper, dann ist $C_{L/K}$ eine zusammenhängende, reguläre, projektive Kurve über K.*

Beweis. Nach Korollar 4.8 ist $C_{L/K}$ eine Kurve. Bleibt zu zeigen, dass $C_{L/K}$ projektiv ist. Sei $V_1, ..., V_r$ eine affine Überdeckung von $C_{L/K}$. Man bette V_i in $\mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$ ein und sei Y_i der Abschluss von V_i in $\mathbb{P}^n$. Dann ist Y_i projektiv und die Inklusionen

$$\iota_i : \ V_i \hookrightarrow Y_i$$

sind Isomorphismen auf das Bild. Da $C_{L/K} \setminus V_i$ endlich ist, lässt sich ι_i nach Lemma 4.9 fortsetzen zu

$$\bar{\iota}_i : \ C_{L/K} \to Y_i.$$

Man definiere

$$\varphi : \ C_{L/K} \xrightarrow{\prod \bar{\iota}_i} \prod Y_i.$$

Sei Y das schematische Bild von φ, siehe [Sta16, Tag 01R7]. Dann ist Y nach [Sta16, Tag 056B] reduziert. Ferner ist Y abgeschlossen im Produkt der projektiven Schemata Y_i, also selbst projektiv. Auf dem Schnitt der U_i ist φ eine Einbettung. Daher ist Y eine irreduzible Kurve mit Funktionenkörper L. Sei $P \in Y$ abgeschlossen. Dann wird der Halm $\mathcal{O}_{Y,P}$ nach Korollar 3.8 von einem diskreten Bewertungsring $R \in C_{L/K}$ dominiert. Man betrachte folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} C_{L/K} \arrow[r, "\varphi"] & Y \\ \operatorname{Spec} R \arrow[u, "f_R"] \arrow[r, "\psi"] & \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{Y,P} . \arrow[u, "f_P"'] \end{tikzcd}$$

Dann setzt sowohl $\varphi \circ f_R$, als auch $f_P \circ \psi$ die Einbettung von $\operatorname{Spec} L \to Y$ fort. Nach Lemma 2.4 folgt, dass das Diagramm kommutiert, da Y separiert ist. Also wird R unter φ auf P abgebildet und φ ist surjektiv. In einem der V_i liegt R, sei dies V_j. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C_{L/K} \arrow[r, "\varphi"] & Y \arrow[d, "pr_i"] \\ V_j \arrow[u] \arrow[r, "\iota_j"] & Y_j . \end{tikzcd}$$

Es folgt

$$R \supset \mathcal{O}_{Y,P} \supset \mathcal{O}_{Y_j,\iota_j(R)} = \mathcal{O}_{V_j,R} = R,$$

da das Diagramm verträglich mit den Einbettungen des Funktionenkörpers L ist. Es folgt $R = \mathcal{O}_{Y,P}$, daher Injektivität von φ und Isomorphie auf den Halmen. □

Damit sind abstrakte reguläre Kurven über K nichts anderes, als zusammenhängende, reguläre, quasi-projektive Kurven über K.

Korollar 4.13. *Sei C eine integre Kurve, so ist C birational zu einer regulären, projektiven Kurve.*

Beweis. Nach Lemma 4.10 ist C_{reg} offen und nach Lemma 4.7 isomorph zu einer regulären abstrakten Kurve. Anders ausgedrückt, wenn L der Funktionenkörper von C ist, so ist C_{reg} isomorph zu einer offenen dichten Teilmenge von $C_{L/K}$, also C birational zu $C_{L/K}$. □

Insbesondere ist jede zusammenhängende, reguläre Kurve quasi-projektiv.

Korollar 4.14. *Sei C eine zusammenhängende, reguläre, eigentliche Kurve über einem Körper K, dann ist C projektiv.*

Beweis. Entsprechend der Bemerkung nach Lemma 4.13 ist C quasi-projektiv, es gibt also eine Einbettung $C \to X$ in ein projektives Schema X. Nach [Sta16, Tag 01KS] ist $C \hookrightarrow C \times_K X$ eine abgeschlossene Einbettung. Da C eigentlich, insbesondere universell abgeschlossen ist, ist $C \times_K X \to X$ eine abgeschlossene Einbettung. Also ist $C \to X$ eine abgeschlossene Einbettung, anders ausgedrückt ist C projektiv. □

Sei $\mathbf{C_K}$ die Kategorie der zusammenhängenden, regulären, projektiven Kurven über einem Körper K mit dominanten Morphismen und $\mathbf{Fkt_K}$ die Kategorie der eindimensionalen Funktionenkörper über K mit K-Homomorphismen. Einer zusammenhängenden, regulären Kurve kann man deren Funktionenkörper zuordnen, dies führt zu einem kontravarianten Funktor

$$\begin{aligned} \mathrm{K}(-)\colon \mathbf{C_K} &\to \mathbf{Fkt_K} \\ C &\mapsto \mathrm{K}(C). \end{aligned}$$

Ein dominanter Morphismus $C \to D$ führt dabei zu einem K-Homomorphismus

$$\mathrm{K}(D) = \mathcal{O}_{X,\eta_D} \to \mathcal{O}_{X,\eta_C} = \mathrm{K}(C)$$

der Halme der Strukturgarbe an den jeweiligen generischen Punkten. Andererseits lässt sich durch Lemma 4.12 folgender Funktor konstruieren

$$\begin{aligned} C_{-/K} \colon \mathbf{Fkt}_\mathrm{K} &\to \mathbf{C}_\mathrm{K} \\ L &\mapsto C_{L/K}. \end{aligned}$$

Das nachfolgende Theorem ergänzt die Wirkung von $C_{-/K}$ auf Morphismen und beschreibt die Zusammenhänge der beiden Funktoren.

Theorem 4.15. *Sei K ein Körper, dann sind* $\mathrm{K}(-)$ *und* $C_{-/K}$ *zueinander inverse Äquivalenzen von Kategorien.*

Beweis. Seien L sowie L' eindimensionale Funktionenkörper über K und $\varphi \colon L' \to L$ ein K-Homomorphismus. Man konstruiere $f = \mathrm{K}(-)(\varphi)$ wie folgt

$$\begin{aligned} f \colon C_{L/K} &\to C_{L'/K} \\ R &\mapsto \varphi^{-1}(R). \end{aligned}$$

Dies ist wohldefiniert, sei v_R die zu R gehörige diskrete Bewertung, dann entspricht f der Zuordnung $v_R \mapsto v_R \circ \varphi$ und letzteres ist wieder eine diskrete Bewertung. Die Mengen

$$\mathrm{D}(x) = \{R \in C_{L'/K} \,|\, x \notin m_R\}$$

bilden für $x \in L'$ eine Basis der Topologie von $C_{L'/K}$. Also reicht es, um Stetigkeit zu zeigen, dass Urbilder dieser Mengen offen sind. Es gilt $\mathrm{D}(\varphi(x)) \subset f^{-1}(\mathrm{D}(x))$, daher ist auch letztere Menge offen. Man definiere nun auf Seite der Garben folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{C_{L'/K}}(U) = \bigcap_{R \in U} R &\to \mathcal{O}_{C_{L/K}}(f^{-1}(U)) = \bigcap_{S \in f^{-1}(U)} S \\ x &\mapsto \varphi(x). \end{aligned}$$

Sei $x \in \bigcap_{R \in U}$, dann ist

$$x \in \bigcap_{R \in U \cap \mathrm{im}(f)} R = \bigcap_{S \in f^{-1}(U)} \varphi^{-1}(S).$$

Also

$$\varphi(x) \in \bigcap_{S \in f^{-1}(U)} S$$

und somit die Abbildung wohldefiniert. Außerdem ist die Abbildung ein Ringhomomorphismus und verträglich mit den Restriktionen. Dass die Zuordnung funktoriell ist folgt auch direkt aus der Abbildungsvorschrift. Weiter ist $f(L) = L'$, es wird also der generische Punkt von $C_{L/K}$ auf den generischen Punkt von $C_{L'/K}$ abgebildet und somit ist f dominant.

Bleibt zu zeigen, dass die Funktoren zueinander invers sind. Der Funktionenkörper von $C_{L/K}$ ist gerade L selbst, daher $\mathrm{K}(-) \circ C_{-/K} = \mathrm{id}$. Sei andererseits nun C eine zusammenhängende, reguläre, projektive Kurve über K. Nach Lemma 4.7 lässt sich diese als offenes Unterschema von $C_{\mathrm{K}(L)/K}$ verstehen. Lemma 4.9 liefert eine eindeutige Fortsetzung

$$\iota \colon C_{L/K} \to C \subset C_{L/K}$$

der Identität auf C. Aufgefasst in $C_{L/K}$ löst auch die Identität auf $C_{L/K}$ die Fortsetzbarkeit. Wegen der Eindeutigkeit folgt $\iota = \mathrm{id}_{C_{L/K}}$, somit $C = C_{L/K}$. □

Das nächste Korollar lässt sich als Zusammenfassung des Kapitels ansehen.

Korollar 4.16. *Sei K ein Körper, folgende Kategorien sind äquivalent:*

(1) *Zusammenhängende, reguläre, projektive Kurven über K mit dominanten Morphismen.*
(2) *Zusammenhängende, reguläre, eigentliche Kurven über K mit dominanten Morphismen.*
(3) *Integre Kurven über K mit dominanten, rationalen Abbildungen.*
(4) *Eindimensionale Funktionenkörper L/K mit K-Homomorphismen.*

Beweis. *(1 $\Leftrightarrow$ 4)* ist der Inhalt von von Theorem 4.15. *(1 $\Rightarrow$ 2)* Jede projektive Kurve ist eigentlich; siehe [Har77, Ch. 2 Thm. 4.9.]. *(2 $\Rightarrow$ 1)* Jede zusammenhängende, reguläre, eigentliche Kurve ist projektiv; siehe Korollar 4.14. *(1 $\Rightarrow$ 3)* Jede reguläre Kurve ist integer und jeder Morphismus ist eine rationale Abbildung. *(3 $\Rightarrow$ 1)* Nach Korollar 4.13 ist jede integre Kurve birational zu einer zusammenhängenden, regulären, projektiven Kurve. Wegen der Äquivalenz von (1) und (4) ist diese Zuordnung sogar schon eindeutig. Morphismen lassen sich nach Lemma 4.9 fortsetzen auf die jeweiligen projektiven Kurven. $\square$

5. Kähler-Differentiale

Kapitel 4 und 5 sind angelehnt an [Liu02, Ch. 6.1. Kähler differentials], [Vak15, Ch. 21. Differentials] und [Sta16, Tag 00TQ Smooth algebras over fields].

Im Folgenden sei $R \to A$ eine R-Algebra. Sei M ein A-Modul. Inspiriert durch die Ableitung im Reellen sei eine R-Derivation $d : A \to M$ eine R-lineare Abbildung, sodass die Leibniz-Regel erfüllt wird:

$$d(a_1 a_2) = a_1 d(a_2) + a_2 d(a_1) \text{ für alle } a_1, a_2 \in A$$

und $dr = 0$ für alle $r \in R$.

Definition 5.1. Der A-Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{A/R}$ zusammen mit einer R-Derivation $d : A \to \Omega_{A/R}$ sei durch folgende universelle Eigenschaft definiert:
Jede R-Derivation $d' : A \to M$, für $M \in \mathrm{Mod}(A)$, faktorisiert eindeutig über $\Omega_{A/R}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "d"] & M \\ \Omega_{A/R} \arrow[ur, dashed, "\exists! f"'] & \end{tikzcd} \quad \text{mit } A\text{-linearem } f.$$

Anders ausgedrückt entspricht $\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M) = \mathrm{Der}_R(A, M)$ den R-Derivationen von A nach M.

Satz 5.2. *Der Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{A/R}$ existiert und ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus der Definition über die universelle Eigenschaft.
Für die Existenz definiere man

$$\Omega_{A/R} = \bigoplus_{a \in A} A da / \sim$$

mit Relationen

$$dr = 0 \text{ für } r \in R,\ d(a + a') = da + da' \text{ und } d(aa') = ada' + a'da \text{ für } a, a' \in A.$$

Ferner sei $d : A \to \Omega_{A/R}$ gegeben durch $a \mapsto da$. Die so definierte Abbildung ist R-linear:

$$rda = rda + adr = d(ra).$$

Die geforderte universelle Eigenschaft wird nach der Konstruktion erfüllt. □

Beispiel 5.3. Sei $A = R[x_i,\ i \in I]/(r_j,\ j \in J)$. Es gilt

$$\Omega_{A/R} = \bigoplus_{i \in I} A dx_i / (dr_j,\ j \in J),$$

wobei $dr_j = \sum_i \frac{\partial r_j}{\partial x_i} dx_i$ ist.

Beweis. Die Abbildung

$$d : A \to \bigoplus_{i \in I} A dx_i / (dr_j,\ j \in J) = N$$
$$a \mapsto \sum \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i.$$

definiert eine R-Derivation. Die Schreibweise ist als die gewöhnliche Ableitung im Polynomring zu verstehen. Es gilt zu zeigen, dass (N, d) die universelle Eigenschaft der Differentiale erfüllt. Sei M ein A-Modul und $\delta : A \to M$ eine R-Derivation. Falls δ über N faktorisiert, muss ein dazugehöriges $f : N \to M$ erfüllen $f(dx_i) = \delta(x_i)$. Damit ist f eindeutig, falls es existiert. Es bleibt zu zeigen, dass mit dieser Vorschrift gilt $dr_j \in \ker f$ und das entstehende Diagramm kommutiert. Beides folgt direkt aus der Leibnizregel. □

Beispiel 5.4. Sei L/K eine separable, algebraische Erweiterung, so ist $\Omega_{L/K} = 0$. Sei $a \in L$ und $\mathrm{P}_{a/K}$ das Minimalpolynom, also $\mathrm{P}_{a/K}(a) = 0$ und $\mathrm{P}'_{a/K}(a) \neq 0$, so folgt

$$0 = d\,\mathrm{P}_{a/K}(a) = \mathrm{P}'_{a/K}(a)da$$

und damit $da = 0$.

Beispiel 5.5. Sei K ein Körper der Charakteristik p und $M = K(t^p), L = K(t)$, so ist $L = M[T]/(T^p - t^p)$. Mit Beispiel 5.3 folgt

$$\Omega_{L/M} = LdT/(pT^{p-1}dT) = LdT.$$

Lemma 5.6. *Sei B eine weitere R-Algebra und $\varphi: A \to B$ ein Homomorphismus, dann ist die Sequenz*

$$\Omega_{A/R} \otimes_A B \xrightarrow{\psi} \Omega_{B/R} \xrightarrow{\pi} \Omega_{B/A} \longrightarrow 0$$

exakt. Dabei wird ψ durch $d \circ \varphi \otimes \mathrm{id}$ und π durch $d: B \to \Omega_{B/A}$ induziert.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass für jeden B-Modul M die Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M) \arrow[r, "\pi^*"] & \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/R}, M) \arrow[r, "\psi^*"] & \mathrm{Hom}_B(\Omega_{A/R} \otimes_A B, M) \arrow[d, equal] \\ & & & \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M) \end{tikzcd}$$

exakt ist. Dies übersetzt sich mittels $\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/R}, M) = \mathrm{Der}_R(B, M)$ zu

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}_A(B, M) \xrightarrow{\iota} \mathrm{Der}_R(B, M) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Der}_R(A, M),$$

wobei ι die Inklusion ist. Hier ist die Exaktheit klar. □

Damit lässt sich Beispiel 5.5 erweitern. Sei nun L/K eine endliche inseparable Erweiterung und L_{sep}/K der relative separable Abschluss von K in L. Sei weiter $L/M/L_{sep}$ so gewählt, dass $L = M(\alpha)$ und L/M eine echte Erweiterung ist. Dann folgt analog zum Beweis im Beispiel 5.5, dass $\Omega_{L/M} \cong L$ ist. Nach Lemma 5.6 folgt die exakte Sequenz

$$\Omega_{M/K} \otimes_M L \longrightarrow \Omega_{L/K} \longrightarrow \Omega_{L/M} \longrightarrow 0.$$

Insbesondere ist $\Omega_{L/K} \to \Omega_{L/M} \neq 0$ surjektiv, daher auch $\Omega_{L/K} \neq 0$.

Lemma 5.7. *Sei $S \subset A$ eine multiplikative Teilmenge, so ist*

$$S^{-1}\,\Omega_{A/R} \cong \Omega_{S^{-1}A/R}\,.$$

Beweis. Sei $d: S^{-1}A \to \Omega_{S^{-1}A/S^{-1}R}$ die zugehörige R-Derivation und $\iota: A \to S^{-1}A$ die Lokalisierungsabbildung. Die Verknüpfung $\iota \circ d$ ist eine R-Derivation, induziert also eine Abbildung $\varphi: \Omega_{A/R} \to \Omega_{S^{-1}A/R}$. Da S bijektiv auf $\Omega_{S^{-1}A/R}$ operiert, lässt sich φ auf $S^{-1}\,\Omega_{A/R}$ fortsetzen. Bezeichne die Fortsetzung weiterhin mit φ. Andererseits betrachte man

$$\begin{aligned} d': S^{-1}A &\to S^{-1}\,\Omega_{A/R} \\ \frac{a}{s} &\mapsto s^{-1}da - \frac{a}{s^2}ds. \end{aligned}$$

Der Quotientenregel beim Ableiten nachempfunden, erfüllt dies die Leibnizregel und ist somit eine R-Derivation. Es wird eine $S^{-1}A$-lineare Abbildung $\psi: \Omega_{S^{-1}A/R} \to S^{-1}\,\Omega_{A/R}$ induziert. Dass die beiden Abbildungen zueinander invers sind, folgt auch direkt aus der Quotientenregel. □

Beispiel 5.8. Sei K ein Körper und $L = K(t)$ ein eindimensionaler Funktionenkörper. Mit Lemma 5.7 und Beispiel 5.3 lassen sich die relativen Differentiale berechnen.

$$\Omega_{L/K} = \Omega_{K[t]_{(0)}/K} \cong (\Omega_{K[t]/K})_{(0)} \cong K[t]dt_{(0)} = Ldt$$

Definition 5.9. Sei L/K ein endlichdimensionaler Funktionenkörper. Man nennt L separabel über K, falls eine Transzendenzbasis $t_1, ..., t_n$ von L existiert, sodass $L/K(t_1, ..., t_n)$ separabel ist.

Beispiel 5.10. Sei L/K ein separabler, endlichdimensionaler Funktionenkörper und $(t_1, ..., t_n)$ eine dies bezeugende Transzendenzbasis. So ist $\Omega_{L/K}$ ein freier L-Modul mit Basis $(dt_1, ..., dt_n)$.

Beweis. Sei $M = K(t_1, ..., t_n)$. Nach Beispiel 5.8 ist $\Omega_{M/K} = (dt_1, ..., dt_n)_M$ und nach Beispiel 5.4 ist $\Omega_{L/M} = 0$. Angenommen die Sequenz aus Lemma 5.6

$$0 \dashrightarrow \Omega_{M/K} \otimes_M L \xrightarrow{\psi} \Omega_{L/K} \longrightarrow \Omega_{L/M} \longrightarrow 0$$

ist linksexakt, dann folgt $\Omega_{L/K} = \Omega_{M/K} \otimes_M L = (dt_1, ..., dt_n)_L$. Wir konstruieren dazu ein Linksinverses zu ψ. Da L/M endlich separabel ist, gibt es ein Element $\alpha \in L$ mit $L = M(\alpha)$ und separablem Minimalpolynom $\mathrm{P}_{\alpha/M} = \sum a_i t^i$. Sei $N = \Omega_{M/K} \otimes_M L$ und $L[N] = L \oplus N$ die durch $N^2 = 0$ gegebene K-Algebra. Dies wird durch

$$\begin{aligned} f : M &\to L[N] \\ m &\mapsto (m, dm) \end{aligned}$$

zu einer M-Algebra, wobei $\Omega_{M/K}$ durch $dm \mapsto dm \otimes 1$ in N aufgefasst wird. Es folgt für eine Nullstelle $(\alpha, \delta\alpha)$ von $\mathrm{P}_{\alpha/M}$ aufgefasst als Polynom in $L[N]$

$$0 = \mathrm{P}_{\alpha/M}(\alpha, \delta\alpha) = \sum (a_i, da_i)(\alpha, \delta\alpha)^i = \underbrace{\mathrm{P}_{\alpha/M}(\alpha)}_{=0} + d\,\mathrm{P}_{\alpha/M}(\alpha) + \mathrm{P}'_{\alpha/M}(\alpha)\delta\alpha + \underbrace{\cdots}_{\in N^2}.$$

Da $\mathrm{P}'_{\alpha/M}(\alpha) \neq 0$ ist, folgt

$$\delta\alpha = \frac{d\,\mathrm{P}_{\alpha/M}(\alpha)}{\mathrm{P}'_{\alpha/M}(\alpha)}.$$

Man setze f fort durch

$$\begin{aligned} f' : L = M[t]/\,\mathrm{P}_{\alpha/M} &\to L[N] \\ t &\mapsto (a, \delta\alpha). \end{aligned}$$

Nach Konstruktion von $\delta\alpha$ ist dies wohldefiniert. Die Verknüpfung mit der Projektion nach N

$$L \xrightarrow{f'} L[N] \xrightarrow{pr_N} N$$

definiert eine K-Derivation. Es wird eine L-lineare Abbildung

$$\varphi\colon\ \Omega_{L/K} \to N$$

induziert unter der dt_i auf dt_i abgebildet wird. Es folgt $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$. □

Zusammenfassend sollte man sich die vorgestellten Beispiele folgendermaßen in Erinnerung behalten. Eine endliche Körpererweiterung L/K ist separabel genau dann, wenn $\Omega_{L/K} = 0$ ist. Genauer gilt, falls L/K separabel von Transzendenzgrad n ist, dass $\Omega_{L/K}$ ein n-dimensionaler Vektorraum ist. Generell ist für L/K einem endlichdimensionalem Funktionenkörper $\Omega_{L/K} \neq 0$.

Lemma 5.11. *Sei B eine weitere R-Algebra und $A \twoheadrightarrow B$ surjektiv mit Kern I, so ist*

$$I/I^2 \xrightarrow{\psi} \Omega_{A/R} \otimes_A B \xrightarrow{\pi} \Omega_{B/R} \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von B-Moduln. Dabei wird $x \in I/I^2$ unter ψ auf $dx \otimes 1$ abgebildet.

Beweis. Man definiere auf I/I^2 eine B-Modulstruktur durch $[b]x = bx$ für $[b] \in B = A/I$, $x \in I/I^2$. So ist ψ ein R-Modulhomomorpismus und wohldefiniert, da gilt

$$\psi(x^2) = dx^2 \otimes 1 = 2dx \otimes x = 0.$$

Die Abbildung π ist die durchs Produkt induzierte, also $da \otimes b \mapsto bda$. Als B-Modul ist $\Omega_{A/R} \otimes_A B$ erzeugt von den Elementen $da \otimes 1$, $a \in A$, daher ist π surjektiv. Nach Beispiel 5.3 kommen in $\Omega_{B/R}$ im Vergleich zu $\Omega_{A/R}$ gerade die Relationen $dx = 0$ für $x \in I$ hinzu. Damit ist die Sequenz in der Mitte exakt. □

Lemma 5.12. *Schreibe $B = A/I$ im Rahmen von Lemma 5.11. Falls die Projektion $h\,:\, A/I^2 \to A/I$ als R-Algebra-Homomorphismus ein Rechtsinverses besitzt, so ist die entstehende Sequenz auch linksexakt.*

Beweis. Sei das Rechtsinverse gegeben durch $f: A/I \to A/I^2$. Man betrachte die Abbildung
$$\begin{aligned} g: A &\to I/I^2 \\ a &\mapsto a - f(h(a)) \end{aligned}$$
so ist
$$\begin{aligned} g(ab) &= ab - f(h(ab)) = ab - f(h(a))f(h(b)) \\ &= a(b - f(h(b))) + b(a - f(h(a))) - ab + af(h(b)) + bf(h(a)) - f(h(a))f(h(b)) \\ &= a(b - f(h(b))) + b(a - f(h(a))) - (a - f(h(a)))(b - f(h(b))) \\ &= a(b - f(h(b))) + b(a - f(h(a))) \\ &= ag(b) + bg(a). \end{aligned}$$
Ferner ist dies auch R-linear, also ist g eine R-Derivation. Damit gibt es eine Fortsetzung
$$\Omega_{A/R} \xrightarrow{g'} I/I^2.$$
Da für $x \in I$ und $da \in \Omega_{A/R}$ gilt
$$xg'(da) = xg(a) \in I^2,$$
definiert $g' \otimes f$ eine Abbildung $\varphi: \ \Omega_{A/R} \otimes_A B \to I/I^2$. Sei ψ wie in Lemma 5.11, dann ist
$$\varphi(\psi(x)) = \varphi(dx \otimes 1) = x - f(h(x)) = x.$$
Folglich ist ψ injektiv. □

Lemma 5.13. *Sei B eine weitere R-Algebra und $C = A \otimes_R B$, so ist*
$$\Omega_{C/B} \cong \Omega_{A/R} \otimes_A C.$$
Beweis. Sei $d: A \to \Omega_{A/R}$, so definiere man
$$d': C \xrightarrow{d \otimes \mathrm{id}} \Omega_{A/R} \otimes_R B.$$
Dies beschreibt eine B-Derivation, faktorisiert demnach über $\Omega_{C/B}$. Da gilt $\Omega_{A/R} \otimes_R B \cong \Omega_{A/R} \otimes_A C$ reicht es zu zeigen, dass Ersteres die universelle Eigenschaft der Kähler-Differentiale erfüllt. Sei $f: C \to M$ eine B-Derivation. Die Verknüpfung
$$A \xrightarrow{\iota} C \xrightarrow{f} M$$
ist damit eine R-Derivation und induziert daher eine A-lineare Abbildung $\varphi: \ \Omega_{A/R} \to M$. Definiert man
$$\Omega_{A/R} \otimes_R B \xrightarrow{\varphi \otimes \mathrm{id}} M,$$
so setzt dies f fort. □

Das nächste Korollar bietet eine andere Darstellung der Differentiale und wird im Kapitel 6 eine Erweiterung auf Schemata liefern.

Korollar 5.14. *Sei $\delta: A \otimes_R A \to A$ gegeben durch $a_1 \otimes a_2 \mapsto a_1 a_2$ und $I = \ker \delta$, so gilt:*
$$\Omega_{A/R} \cong I/I^2.$$
Beweis. Die exakte Sequenz
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & A \otimes_R A \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[l, bend right, "\mathrm{id} \otimes 1"'] & 0 \end{tikzcd}$$
spaltet. Dieser Spalt ist ein A-Algebra-Homomorphismus, nach Lemma 5.12 ist die Sequenz
$$0 \to I/I^2 \to \Omega_{A \otimes_R A/A} \otimes_{A \otimes_R A} A \to \Omega_{A/A} \to 0$$
exakt. Mit Lemma 5.13 ergibt sich:
$$\Omega_{A \otimes_R A/R} \cong \Omega_{A/R} \otimes_A (A \otimes_R A),$$

also

$$\Omega_{A\otimes_R A/A} \otimes_{A\otimes_R A} A \cong \Omega_{A/R} \otimes_A (A \otimes_R A) \otimes_{A\otimes_R A} A \cong \Omega_{A/R}\,.$$

Da weiter $da = 0 \in \Omega_{A/A}$ für jedes $a \in A$ gilt, folgt, dass

$$0 \to I/I^2 \to \Omega_{A/R} \to 0$$

exakt ist. □

Lemma 5.15. *Sei K ein perfekter Körper, A eine endlich erzeugte K-Algebra und $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal. Dann sind äquivalent:*

(1) *Der lokale Ring $A_\mathfrak{m}$ ist regulär.*
(2) *Die Dimensionen $\dim_{\kappa(\mathfrak{m})} \Omega_{A/K} \otimes_A \kappa(\mathfrak{m}) = \dim A_\mathfrak{m}$ stimmen überein.*

Beweis. Es reicht ein Rechtsinverses zu der Projektion $A/\mathfrak{m}^2 \to A/\mathfrak{m}$ zu konstruieren. Nach Lemma 5.12 führt dies zu der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow \Omega_{A/K} \otimes_A \kappa(\mathfrak{m}) \longrightarrow \Omega_{\kappa(\mathfrak{m})/K} \longrightarrow 0.$$

Da $\kappa(\mathfrak{m})/K$ endlich separabel ist, gilt $\Omega_{\kappa(\mathfrak{m})/K} = 0$ und daher ist $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong \Omega_{A/K} \otimes_A \kappa(\mathfrak{m})$. Es folgt

$$\dim_{\kappa(\mathfrak{m})} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim_{\kappa(\mathfrak{m})} \Omega_{A/K} \otimes_A \kappa(\mathfrak{m}).$$

Die K-Algebra A ist endlich erzeugt, also noethersch. Daher ist $A_\mathfrak{m}$ genau dann regulär, wenn $\dim_{\kappa(\mathfrak{m})} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A_\mathfrak{m}$ gilt.

Sei also $\kappa(\mathfrak{m}) = K(\bar{\alpha})$ mit separablem Minimalpolynom $\mathrm{P}_{\bar{\alpha}/K}$ und α' ein Urbild in $A/\mathfrak{m}^2$. Wir suchen ein $\alpha \in A/\mathfrak{m}^2$, welches der Gleichung $\mathrm{P}_{\bar{\alpha}/K}(\alpha) = 0$ genügt und $\bar{\alpha}$ modulo $\mathfrak{m}$ entspricht. Man setze dafür $\alpha = \alpha' + \epsilon$ an. Dann ist

$$0 = \mathrm{P}_{\bar{\alpha}/K}(\alpha' + \epsilon) = \underbrace{\mathrm{P}_{\bar{\alpha}/K}(\alpha')}_{\in \mathfrak{m}} + \epsilon \underbrace{\mathrm{P}'_{\bar{\alpha}/K}(\alpha')}_{\in \kappa(\mathfrak{m})^\times} + \underbrace{\cdots}_{\in I^2}\,.$$

Die Gleichung lässt sich damit nach ϵ auflösen und es gilt $\epsilon \in \mathfrak{m}$. Die Vorschrift $\bar{\alpha} \mapsto \alpha$ definiert also ein Rechtsinverses. □

6. Glattheit

Sei im Folgenden K ein Körper und X ein equidimensionales, separiertes K-Schema von endlichem Typ.

Nachdem das letzte Kapitel relativ technisch war, folgen daraus nun Resultate für Schemata. Dazu zunächst eine Ausweitung der Differentiale auf solche. Sei $X \to X \times_K X$ die Diagonaleinbettung, so ist dies eine abgeschlossene Einbettung. Wir bezeichnen mit $\mathcal{I} = ker(\mathcal{O}_{X \times_K X} \to \mathcal{O}_X)$ die zugehörige Idealgarbe.

Definition 6.1. Sei $\mathcal{I}$ wie eben, so bezeichnet man $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ eingeschränkt auf X mit $\Omega^1_{X/K}$. Die so definierte Garbe nennt man auch Garbe der Differentialformen.

Affin entspricht dies den relativen Differentialformen von Kapitel 5. Sei $U \subset X$ affin, also $U = \operatorname{Spec} A$ für eine K-Algebra A. Nach Korollar 5.14 ist $\Omega^1_{X/K} \restriction_U$ die assoziierte Garbe zu $\Omega_{A/K}$. Ferner ist diese kohärent nach Beispiel 5.3, da X von endlichem Typ ist.

Definition 6.2. Sei X von Dimension n über K und $P \in X$. Dann heißt X glatt in P, falls $\Omega^1_{X/K}$ frei von Rang n in einer Umgebung von P ist. Man nennt X glatt, falls X glatt in allen Punkten ist.

Anders ausgedrückt heißt X glatt, falls $\Omega^1_{X/K}$ eine lokalfreie Garbe von Rang $\dim X$ ist.

Lemma 6.3. *Sei $X \subset \mathbb{A}^n$ affin und von dem Ideal I in $K[X_1, ..., X_n]$ ausgeschnitten. Wir bezeichnen mit $\mathbf{J}_P$ die Jacobimatrix von Erzeugern des Ideals im Punkt P. Sei $P \in X$, so sind äquivalent:*

(1) $\dim_{\kappa(P)} \Omega_{A_P/K} \otimes_{A_P} \kappa(P) = \dim X$.
(2) $\operatorname{rk} \mathbf{J}_P = \operatorname{codim}_{\mathbb{A}^n} X$.

Beweis. Sei $A = K[X_1, ..., X_n]$, $B = A/I$, also $\mathbb{A}^n = \operatorname{Spec} A$ und $X = \operatorname{Spec} B$. Lemma 5.11 induziert eine exakte Sequenz

$$I/I^2 \longrightarrow \Omega_{A/K} \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B/K} \longrightarrow 0.$$

Tensoriert mit $\kappa(P)$ und lokalisiert an P liefert dies

$$I/I^2 \otimes_B \kappa(P) \xrightarrow{\psi} \Omega_{A_P/K} \otimes_{A_P} \kappa(P) \longrightarrow \Omega_{B_P/K} \otimes_{B_P} \kappa(P) \longrightarrow 0.$$

Seien $f_1, ..., f_r$ Erzeuger von I, dann erzeugen $df_1 \otimes 1, ..., df_r \otimes 1$ das Bild in $\Omega_{A/K} \otimes_A \kappa(P)$. Die Spalten der Jacobimatrix $\mathbf{J}_P$ entsprechen den Linearkombinationen der df_i in den dx_i. Daher entspricht der Rang von $\mathbf{J}_P$ der Dimension von im ψ. Weiter ist $\dim_{\kappa(P)} \Omega_{A_P/K} \otimes_{A_P} \kappa(P) = rk_A\, \Omega_{A/K} = n$ nach Satz 6.5. Mit der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{im} \psi \longrightarrow \Omega_{A_P/K} \otimes_{A_P} \kappa(P) \longrightarrow \Omega_{B_P/K} \otimes_{B_P} \kappa(P) \longrightarrow 0$$

folgt dann

$$\operatorname{rk} \mathbf{J}_P = n - (\dim_{\kappa(P)} \Omega_{B_P/K} \otimes_{B_P} \kappa(P)).$$ □

Lemma 6.4. *Es sind äquivalent:*

(1) *X ist regulär.*
(2) *$\mathcal{O}_{X,P}$ ist regulär für alle abgeschlossenen Punkte $P \in X$.*

Beweis. Siehe [Sta16, Tag 02IT]. □

Satz 6.5. *Sei $P \in X$ ein abgeschlossener Punkt, es sind äquivalent:*

(1) *X ist glatt in P.*
(2) $\dim_{\kappa(P)} (\Omega_{X/K})_P \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} \kappa(P) = \dim X$.
(3) $\dim_{\kappa(Q)} (\Omega_{X/K})_Q \otimes_{\mathcal{O}_{X,Q}} \kappa(Q) = \dim X$ *für eine Umgebung U von P und alle $Q \in U$.*

Falls diese äquivalenten Bedingungen erfüllt sind, ist $\mathcal{O}_{X,P}$ regulär.

Beweis. *(1 ⇒ 2)* Der Modul der Differentialformen ist frei von Rang $\dim X$ in einer Umgebung von P. Im Punkt P folgt
$$\dim_{\kappa(P)}(\Omega_{X/K})_P \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} \kappa(P) = \dim X.$$
(2 ⇒ 3) Nach Lemma 6.3 ist (2) äquivalent dazu, dass in einer affinen Umgebung $U \subset \mathbb{A}^n_K$ um P gilt
$$\operatorname{rk} \mathbf{J}_P = n - \dim X.$$
Der Rang ist konstant auf einer offenen Umgebung V von P, wiederum mit Lemma 6.3 folgt (3).

(3 ⇒ 1) Man setze $A = O_{X,P}$ und n als die Dimension von X. Nach Korollar 2.6 reicht es zu zeigen, dass $\Omega_{A/K}$ frei von Rang n ist. Sei ohne Einschränkung $X = \operatorname{Spec} A$, dann ist (3) auf ganz X erfüllt. Sei $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluss von K und $X_{\bar{K}}$ der Basiswechsel zu jenem. Die Dimension von X und $X_{\bar{K}}$ stimmen überein; siehe [Sta16, Tag 00P4]. Bedingung (3) gilt genauso für $X_{\bar{K}}$. Nach Lemma 5.15 ist $\mathcal{O}_{X_{\bar{K}},P}$ regulär und mit Lemma 6.4 ist $X_{\bar{X}}$ regulär. Da $X_{\bar{K}} \to X$ flach ist, ist X regulär; siehe [Sta16, Tag 00OF]. Damit ist zum einem der Zusatz bewiesen und zum anderen ist X reduziert. Sei $\mathfrak{P}$ das zu P korrespondierende Primideal in A und $(f_1, ..., f_n)$ eine $\kappa(\mathfrak{P})$-Basis von $(\Omega_{A/K})_{\mathfrak{P}} \otimes_{A_{\mathfrak{P}}} \kappa(\mathfrak{P})$. Nach dem Lemma von Nakayama gibt es Urbilder $\bar{y}_1, ..., \bar{y}_n$, welche $\Omega_{A/K}$ erzeugen. Dies entspricht einem surjektiven Homomorphismus
$$\varphi : A^n \twoheadrightarrow \Omega_{A/K}\,.$$
Nach Voraussetzung ist für alle $\mathfrak{Q} \in \operatorname{Spec} A$ die durch Lokalisierung entstehende Abbildung φ_Q ein Isomorphismus. Es folgt
$$\ker \varphi \subset \bigcap_{\mathfrak{Q} \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{Q} = 0.$$
Die letzte Gleichheit folgt, da X reduziert ist. Folglich ist φ injektiv und die $\bar{y}_1, ..., \bar{y}_n$ bilden eine Basis von $\Omega_{A/K}$. □

Insbesondere lässt sich also mit dem Jacobikriterium aus Lemma 6.3 die Glattheit in einem Punkt testen.

Korollar 6.6. *Ein glattes K-Schema ist regulär.*

Beweis. Nach Satz 6.5 ist ein glattes K-Schema regulär in allen abgeschlossenen Punkten, nach Lemma 6.4 ist es schon regulär in allen Punkten. □

Korollar 6.7. *Sei K perfekt und X ein reguläres K-Schema, dann ist X glatt.*

Beweis. Sei X von Dimension n und ohne Einschränkung affin. Also $X = \operatorname{Spec} A$ mit einer endlich erzeugten, integren K-Algebra A. Wenn X regulär ist, so folgt
$$n = \dim_{\kappa(\mathfrak{m})} \Omega_{A/K} \otimes_A \kappa(\mathfrak{m})$$
aus Lemma 5.15 für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \in A$. Lokalisieren an $\mathfrak{m}$ liefert, zusammen mit Lemma 5.7 und da A ein Integritätsring ist,
$$n = \dim_{\kappa(\mathfrak{m})} \Omega_{A_\mathfrak{m}/K} \otimes_{A_\mathfrak{m}} \kappa(\mathfrak{m}).$$
Mit Satz 6.5 folgt Glattheit. □

Am Ende sehen wir eine reguläre, nicht glatte Kurve. Dementsprechend sieht man, dass Korollar 6.7 nicht für allgemeine Körper gelten kann.

Satz 6.8. *Sei X integer, so ist X genau dann generisch glatt, wenn* $\mathrm{K}(X)/K$ *separabel ist.*

Beweis. Sei X generisch glatt, $L = \mathrm{K}(X)$, $n = \dim X$, η der generische Punkt von X und $U \subset X$ so, dass $\Omega^1_{X/K} \restriction_U$ frei von Rang n ist. Da $\Omega^1_{X/K}$ kohärent ist, folgt $(\Omega^1_{X/K})_\eta = \Omega_{L/K}$ nach Lemma 5.7 . Somit ist
$$n = \operatorname{rk}_{\mathcal{O}_X \restriction_U} \Omega^1_{X/K} \restriction_U = \dim_L (\Omega^1_{X/K} \restriction_U)_\eta = \dim_L \Omega_{L/K}\,.$$
Sei $\Omega_{L/K}$ von $dt_1, ..., dt_n$ erzeugt und $M = K(t_1, ..., t_n)$. Dann folgt mit Lemma 5.6 die exakte Sequenz
$$\Omega_{M/K} \otimes_M L \longrightarrow \Omega_{L/K} \longrightarrow \Omega_{L/M} \longrightarrow 0.$$

Nach Konstruktion ist dabei die erste Abbildung surjektiv, also $\Omega_{L/M} = 0$. Folglich ist L/M separabel und algebraisch. Dann ist $t_1, ..., t_n$ eine Transzendenzbasis von L und somit L/K separabel.

Sei nun $K(X)/L$ separabel. Mit der Notation von zuvor ist $\dim_L(\Omega^1_{X/K})_\eta = n$. Da X lokal noethersch ist und $\Omega^1_{X/K}$ kohärent ist, gibt es nach Korollar 2.6 eine Umgebung von η auf der $\Omega^1_{X/K}$ auch von Rang n ist. □

Beispiel 6.9. Sei $K = \mathbb{F}_p(t)$ und $L = K(X, \sqrt[p]{t})$. Dann ist L/K nicht separabel. Nach Theorem 4.15 ist $X = C_{L/K}$ eine reguläre, projektive Kurve, insbesondere separiert und von endlichem Typ über K. Andererseits ist X nach Satz 6.8 nicht glatt.

Das nächste Beispiel zeigt, dass es Schemata, sogar reguläre Kurven gibt, die generisch glatt, aber nicht glatt sind.

Beispiel 6.10. Sei K ein Körper von Charakteristik $p \neq 2$ und f ein über K irreduzibles, inseparables Polynom. Sei $A = K[X, Y]/(Y^2 - f(X))$ und $C = \operatorname{Spec} A$. Der Funktionenkörper $\mathrm{K}(C) = \operatorname{Quot} A$ ist separabel über K, da das Polynom $Y^2 - f(X)$ separabel über $K(X)$ ist. Daher ist C generisch glatt. Da f irreduzibel und inseparabel ist, ist $df = 0$. Es folgt mit Beispiel 5.3

$$\Omega_{C/K} = \Omega_{A/K} = \frac{AdX \oplus AdY}{d(Y^2 - f(X))} = AdX \oplus \frac{A}{2Y} dY.$$

Sei Q der durch die Gleichung $Y = 0$ gegebene Punkt in C. Außerhalb von Q ist die Dimension

$$\dim_{\kappa(P)} \Omega_{C/K} \otimes_{\mathcal{O}_C} \kappa(P) = \dim_{\kappa(P)} \kappa(P) dX = 1,$$

da $2Y$ eine Einheit in $\kappa(P)$ ist. Daher ist C nach Satz 6.5 außerhalb von Q sowohl glatt, als auch regulär. In dem Punkt Q ist C nicht glatt, da $(\Omega_{C/K})_Q = AdX \oplus AdY$ ist. Jedoch ist Y in Q eine uniformisierende, da f über K irreduzibel ist. Also ist C regulär.

Literatur

[AM69] Michael Francis Atiyah and Ian Grant Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Reading, 1969.

[Eis95] David Eisenbud, *Commutative algebra: with a view toward algebraic geometry*, Springer Verlag New York Inc., 1995.

[Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag New York Inc., 1977.

[JCJ06] Joachim Schwermer Jens Carsten Jantzen, *Algebra*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[Liu02] Qing Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford University Press on Demand, 2002.

[OZ58] Pierre Samuel Oscar Zariski, *Commutative algebra volume 1*, D. VAN NOSTRAND COMPANY, INC, 1958.

[Sta16] The Stacks Project Authors, *Stacks project*, `http://stacks.math.columbia.edu`, 2016.

[Vak15] Ravi Vakil, *Foundations of algebraic geometry*, `http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/index.html`, 2015, December 29, 2015 draft.