Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2020

Lineare Algebra II
Prof. Dr. Martin Ulirsch
Felix Röhrle

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Gegeben sei folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, sodass $S^{-1}AS$ in Jordan'scher Normalform ist. Bestimmen Sie außerdem das Minimalpolynom von A.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

In dieser Aufgabe möchte wir auf die Ergebnisse aus Blatt 0, Aufgabe 2 aufbauen. Alles was Sie dort gezeigt haben, dürfen Sie hier verwenden.

Für $d \geq 0$ sei V_d der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens d und Koeffizienten in $\mathbb{C}$. Sei $D : V_d \to V_d$ die formale Ableitung.

(a) Überzeugen Sie sich davon, dass D nilpotent ist. Was ist der Wert von

$$m = \min\{n \in \mathbb{N}_0 \mid D^n = 0\}?$$

(b) Betrachte folgende Basis von V_d (Sie müssen nicht zeigen, dass das wirklich eine Basis ist):

$$\mathcal{B} = \{b_0, \ldots, b_d\}$$
$$b_i = \sum_{k=0}^{i} T^k.$$

Geben Sie die Abbildungsmatrix A von D bezüglich dieser Basis an!

(c) Geben Sie eine Matrix S an, sodass $S^{-1}AS$ in Jordan'scher Normalform ist. Tipp: suchen Sie nach einer Begründung und nicht nach einer Rechnung!

(d) Für $k \in \mathbb{N}_0$, was ist $\mathrm{rk}[D]_{\mathcal{B}}^k$?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $F : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie: Falls $F^3 = F$, so ist F diagonalisierbar.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Sei A eine $(n \times x)$-Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass es Matrizen D und N gibt mit folgenden Eigenschaften:

- D ist diagonalisierbar, N ist nilpotent,
- $A = D + N$ und
- $DN = ND$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{C}$. Betrachte den Vektorraum

$$V_A = \{B \mid AB = BA\}.$$

Zeigen Sie, dass $\dim V_A \geq n$. Beschreiben Sie dazu ein System von n linear unabhängigen Elementen in V_A.

Abgabe bis zum **Donnerstag, den 30. April** um **12:00**.