Prof. Dr. M. Möller
Quentin Gendron
Kolja Hept

WS 2013-14
Frankfurt/M., 11.11.2013
Abgabetermin: 18.11.2013

Riemannsche Flächen

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

1. Finde eine Triangulierung des $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ mit genau sechs Ecken.
2. Finde eine Triangulierung des Torus mit genau sieben Ecken.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Finde eine Familie von 2-Simplices $\{\alpha_i\}_{i\in I}$, $\alpha_i : S \to \mathbb{C}$ mit $\bigcup_{i\in I} \alpha_i(S) = \mathbb{C}$, so dass gilt:

1. Liegt $a \in \mathbb{C}$ nicht auf einer Kante, so gibt es genau ein $i \in I$ mit $a \in \alpha_i(S)$.
2. Die Punkte ii) und iii) aus der Definition von 'Triangulierung' sind erfüllt.
3. $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ ist keine Triangulierung von $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Berechne die Fundamentalgruppe des punktierten Torus

$$T^* := S^1 \times S^1 \setminus \{(1,1)\}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

1. Zeige, dass für jede Gruppe G die Menge
$$[G,G] := \{\prod_{i=1}^{n}[x_i, y_i] : n \in \mathbb{N}, x_i, y_i \in G\} \subset G$$
ein Normalteiler in G ist mit $G/[G,G]$ Abelsch. $[G,G]$ heißt *Kommutatoruntergruppe von* G und $G^{\mathrm{ab}} := G/[G,G]$ ihre *Abelisierung*.
2. Sei $\pi : G \to G^{\mathrm{ab}}$ die kanonische Projektion. Zeige, dass für jeden Homomorphismus $f : G \to A$ mit A Abelsch es genau einen Homomorphismus $g : G^{\mathrm{ab}} \to A$ gibt mit $g \circ \pi = f$ und dass G^{ab} bezüglich dieser universellen Eigenschaft bis auf Isomorphie eindeutig ist.
3. Bestimme den Rang der Abelisierung der *Knotengruppe*
$$B_3 = \langle x, y \mid xyx = yxy\rangle.$$