Prof. Dr. M. Möller
Quentin Gendron
Kolja Hept

WS 2013-14
Frankfurt/M., 4.11.2013
Abgabetermin: 11.11.2013

Riemannsche Flächen

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien X_1, X_2, U topologische Räume, für alle $i \in \{1,2\}$ seien $\varphi_i : U \to X_i$ Homöomorphismen auf ihr Bild mit $\varphi_i(U)$ offen in X_i und $X = X_1 \coprod X_2/\sim$ die Verklebung von X_1 und X_2 entlang der φ_i. Weiter bezeichne

$$\alpha_i : X_i \to X, x \mapsto [x]$$

die natürliche Einbettung.
Zeige, dass das Tripel (X, α_1, α_2) folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Es gilt $\alpha_1 \circ \varphi_1 = \alpha_2 \circ \varphi_2$ und für jedes solche Tripel $(\tilde{X}, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$ mit $\tilde{\alpha}_i : X_i \to \tilde{X}$ stetig und $\tilde{\alpha}_1 \circ \varphi_1 = \tilde{\alpha}_2 \circ \varphi_2$ gibt es genau eine stetige Abbildung $f : X \to \tilde{X}$ mit $f \circ \alpha_i = \tilde{\alpha}_i$ für alle $i \in \{1,2\}$. Zeige auch, dass X bis auf Homöomorphie bezüglich dieser universellen Eigenschaft eindeutig ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir schreiben $\langle A \mid R \rangle$ für die Gruppe mit Präsentation (A, R). Stelle folgende Gruppen als amalgamiertes Produkt von jeweils zwei zyklischen Gruppen dar:

1. $\langle x, y \mid y^6, x^3y^3 \rangle$
2. $\langle x, y \mid x^4, y^6, x^3y^3 \rangle$
3. $\langle x, y \mid x^5, y^6, x^3y^3 \rangle$
4. $\langle x, y \mid x^5, y^{10}, x^3y^8 \rangle$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei D_n die Symmetriegruppe des regelmäßigen n-Ecks. Aus jeder 'Grundlagen der Algebra'-Vorlesung ist bekannt, dass D_n von einer Spiegelung s und einer Rotation r um den Winkel $\frac{2}{n}\pi$ erzeugt wird. Zeige, dass

$$(\{s, r\}, \{s^2, r^n, rsrs\})$$

eine Präsentation von D_n ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeige, dass die symmetrische Gruppe S_n eine Präsentation der Form (A, R) hat mit $A = \{x_1, ..., x_{n-1}\}$ und

$$R = \{x_i^2\}_{i \in \{1,...n-1\}} \cup \{x_i x_{i+1} x_i x_{i+1} x_i x_{i+1}\}_{i \in \{1,...,n-2\}} \cup \{x_i x_j x_i x_j\}_{|j-i| \geq 2}.$$