Prof. Dr. M. Möller
Quentin Gendron
Kolja Hept

WS 2013-14
Frankfurt/M., 17.06.2013
Abgabetermin: 4.11.2013

Riemannsche Flächen

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien X, Y zusammenhängende Riemannsche Flächen, $f : X \to Y$ holomorph und endlich. Zeige:

1. f ist surjektiv.
2. Sei $y \in f(X)$ und U eine Umgebung von $f^{-1}(y)$. Dann existiert eine Umgebung V von y mit $f^{-1}(V) \subset U$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien X, Y topologische Räume. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt *topologische Überlagerung*, wenn f surjektiv ist und jedes $y \in Y$ eine offene Umgebung V besitzt, so dass $f^{-1}(V) = \dot{\bigcup}_{i \in I} U_i$ und für alle $i \in I$ die Menge $U_i \subset X$ offen und $f|_{U_i} : U_i \to V$ ein Homöomorphismus ist. Zeige:

1. Sind X, Y Riemannsche Flächen, und $f : X \to Y$ eine unverzweigte Überlagerung, dann ist f eine topologische Überlagerung.
2. Ist $f : X \to Y$ eine topologische Überlagerung und Y eine Riemannsche Fläche, dann gibt es eine eindeutige komplexe Struktur auf X, so dass f eine holomorphe, unverzweigte Überlagerung ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

1. Sei $f : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung zusammenhängender Riemannscher Flächen und sei $x \in X$. Zeige, dass für jede Karte (U, g) um x und jede Karte (V, h) um $f(x)$ gilt:
$$\mathrm{ord}_x(f) = \min\{k \in \mathbb{N} : (hfg^{-1})^{(k)}(g(x)) \neq 0\}$$
2. Setze die Abbildung
$$j : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto 256 \frac{(z^2 - z + 1)^3}{z^2(z-1)^2}$$
zu einer holomorphen Abbildung $\tilde{j} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ fort und bestimme die Verzweigungspunkte sowie den Grad von $\tilde{j}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \to G$ stückweise stetig differenzierbare Wege. Zeige: Sind γ_0 und γ_1 homotop, dann gilt
$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz.$$
Folgere daraus, dass $\mathbb{C}^*$ nicht einfach zusammenhängend ist.