Prof. Dr. M. Möller
Quentin Gendron
Kolja Hept

WS 2013-14
Frankfurt/M., 20.1.2014
Abgabetermin: 27.1.2014

Riemannsche Flächen

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweise Lemma 7.2 des Skripts.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei X eine Riemannsche Fläche von Geschlecht 16 und

$$l := (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 19, 21, 24, 25).$$

i) Berechne die Dimension des Raumes der 2-Differentiale auf X.

ii) Angenommen l sei die Lückenreihe um $x \in X$. Zeige, dass die Verschwindungsordnungen aller 2-Differentiale im Punkt x alle Zahlen zwischen 0 und 48 bis auf vielleicht 37, 39 und 45 enthält.

iii) Benutze i) und ii) um zu zeigen, dass l keine Lückenreihe ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei X eine hyperelliptische Riemannsche Fläche von Geschlecht g mit Gleichung $y^2 = \prod_{i=1}^{2g+2}(x - z_i)$.

i) Zeige, dass die Produkte der 1-Formen auf X einen Vektorraum der Dimension $2g - 1$ aufspannen.

ii) Zeige für $j = 0, \dots, g - 3$, dass $x^j \frac{(dx)^2}{y}$ 2-Differentiale sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ paarweise verschieden und X die Kompaktifizierung von $X^* := \{w^3 = z(z-1)(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3)\}$. Sei $p : X \to \mathbb{P}^1$ die Fortsetzung der Abbildung $X^* \to \mathbb{C}; (w, z) \to z$ (insbesondere hat ∞ nur ein Urbild unter p).

i) Bestimme das Geschlecht von X.

ii) Gebe eine Basis von $H^0(X, \Omega_X)$ an.

Tipp: Analog zu Proposition 7.10.

iii) Bestimme die Lückenreihe im Punkt $(0, 0)$ und zeige, dass X keine hyperelliptische Kurve ist.