Prof. Dr. M. Möller
Quentin Gendron
Kolja Hept

WS 2013-14
Frankfurt/M., 18.11.2013
Abgabetermin: 25.11.2013

Riemannsche Flächen

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

i) Zeigen Sie, dass alle zusammenhängende Überlagerungen von $\mathbb{P}^1$, die über zwei Punkten verzweigt sind, Geschlecht null haben.

ii) Sei Y eine Riemannsche Fläche von Geschlecht 2. Bestimmen Sie, wie viele (nicht isomorphe) unverzweigte Überlagerungen von Y von Grad 8 mit Monodromiegruppe

$$G := \langle (1285)(3764), (1386)(2457), (1487)(2653) \rangle < S_8$$

existieren.

Bemerkung: Die Gruppe G ist isomorph zu der Quaternionengruppe und $[G, G] = \{\mathrm{Id}, (18)(25)(36)(47)\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

i) Geben Sie eine holomorphe Abbildung $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ von Grad vier an, sodass die Gruppe $\{\mathrm{Id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ die Monodromiegruppe der assoziierten Überlagerung ist.

ii) Sei $\tilde{f} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ die Fortsetzung von $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{(z-1)^3}{z^2+1}$. Diese Fortsetzung definiert eine verzweigte Überlagerung von $\mathbb{P}^1$. Bestimmen Sie alle Verzweigungspunkte und den Monodromiehomomorphismus Mon der assoziierten unverzweigten Überlagerung.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\pi : X \to Y$ eine unverzweigte zusammenhängende Überlagerung von Grad zwei einer Riemannschen Fläche von Geschlecht g.

i) Zeigen Sie, dass $2^{2g} - 1$ paarweise nicht isomorphe Überlagerungen dieses Typs existierten.

ii) Jetzt sei $Y := \mathbb{C}/\Lambda$ für ein Gitter Λ in $\mathbb{C}$. Geben Sie drei Untergitter Λ_i von Λ an, sodass die drei Überlagerungen von i) als $\mathbb{C}/\Lambda_i \to \mathbb{C}/\Lambda$ gegeben sind.

Prof. Dr. M. Möller
Quentin Gendron
Kolja Hept

WS 2013-14
Frankfurt/M., 18.11.2013
Abgabetermin: 25.11.2013

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\pi : X \to Y$ eine unverzweigte normale Überlagerung von Grad d von Riemannschen Flächen. Sei $b \in Y$ und $\pi^{-1}(b)$ die Faser von b. Zeigen Sie, dass die Monodromiegruppe auf $\pi^{-1}(b)$ transitiv operiert.
Umgekehrt sei $\rho : \pi_1(Y, b) \to S_d$ ein Gruppenhomomorphismus, sodass das Bild transitiv auf $\{1, \cdots, d\}$ operiert. Zeigen Sie, dass eine unverzweigte zusammenhängende Überlagerung $\pi : X \to Y$ von Grad d existiert, sodass $\rho(\pi_1(Y, b))$ isomorph zu $\mathrm{Mon}(\pi)$ ist. Zeigen Sie, dass diese Überlagerung bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.