Wintersemester 2010/2011 14.12.2011

Prof. Dr. Martin Möller
Dr. André Kappes

Lineare Algebra – Tutorium 9

Aufgabe 1 Es sei $z \in \mathbb{C}$. Bestimme die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{C}$

$$Ax = b \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & z^2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

in Abhängigkeit von z.

Aufgabe 2 Es sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{F}_2$-Vektorraum mit Basis $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ und W ein 4-dimensionaler $\mathbb{F}_2$-Vektorraum mit Basis $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$. Weiter sei $f : V \to W$ die lineare Abbildung, die durch

$$\begin{aligned} f(b_1) &= c_1 + c_3 + c_4 \\ f(b_2) &= c_2 + c_3 \\ f(b_3) &= c_1 + c_3 + c_4 \end{aligned}$$

gegeben ist. Für welche $a \in \mathbb{F}_2$ liegt der Vektor $w_a = (1 + a)c_1 + (1 + a)c_2 + c_4$ im Bild von f? Wenn w_a im Bild von f liegt, was sind dann seine Urbilder?

Aufgabe 3 Es seien ϕ_1, ϕ_2 zwei Bilinearformen auf $\mathbb{R}^2$. Welcher der folgenden Ausdrücke definiert eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$? Welche davon sind symmetrisch, bzw. alternierend?

a) $(v, w) \mapsto \phi_1(v, w) + \phi_1(w, v)$

b) $(v, w) \mapsto \phi_1(v, w) \cdot \phi_2(w, w)$

c) $(v, w) \mapsto -\phi_1(w, v)$

d) $(v, w) \mapsto \sqrt{|\phi_1(v, v)|}$

e) $(v, w) \mapsto \phi_1(v, w) - \phi_1(w, v)$

Aufgabe 4 Aus der Vorlesung wissen wir: Eine alternierende Bilinearform ϕ auf $\mathbb{R}^2$ ist eindeutig durch $\phi((1, 0), (0, 1))$ bestimmt. (Wieso?)

Welche und wie viele Werte bestimmen eine beliebige (bzw. symmetrische) Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$ eindeutig?

Aufgabe 5 *(optional)* Es sei K ein Körper und ϕ eine n-Multilinearform auf K^n. Zeige: Die Abbildung

$$\widetilde{\phi} : K^n \times \cdots \times K^n \to K, \quad (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \phi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)})$$

ist eine symmetrische n-Multilinearform.