Wintersemester 2010/2011 07.12.2011

Prof. Dr. Martin Möller
Dr. André Kappes

Lineare Algebra – Tutorium 8

Aufgabe 1 Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung

$$x \mapsto f(x) = Ax \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildungsmatrix von f zur Standardbasis $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ kann man einfach ablesen (nämlich?). Es sei

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine weitere Basis von $\mathbb{R}^3$. Bestimme die Basiswechselmatrizen Θ_{BC}, Θ_{CB} und die Abbildungsmatrix von f zur Basis C.

Aufgabe 2 Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper K und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Es gebe ein $v \in V$, $v \neq 0$ mit $f(v) = \lambda v$ für ein $\lambda \in K$.

Zeige, dass die Abbildungsmatrix von f bezüglich einer geeigneten Basis die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

hat (wobei bei allen $*$ irgendwelche Einträge aus K stehen).

Aufgabe 3 Auf $\mathbb{R}$ definieren wir die Relation $x \sim y :\Leftrightarrow x^2 = y^2$.

Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, und schreibe $\mathbb{R}$ als disjunkte Vereinigung von Äquivalenzklassen.

Aufgabe 4 Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) A ist nicht invertierbar.

(ii) $\mathrm{Rang}(A) < n$.

(iii) Es gibt ein $x \in K^n$, $x \neq 0$ mit $Ax = 0$.

Aufgabe 5 Es sei
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Zeige, dass es invertierbare Matrizen $S \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, $T \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ so dass
$$SAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
gilt und bestimme diese.

Aufgabe 6 *(optional)* Finde auf $M = \{1, 2, 3\}$ eine Relation $\sim$ die

(i) reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv ist.

(ii) symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv ist.

(iii) transitiv und reflexiv, aber nicht symmetrisch ist.

Die Eigenschaften "reflexiv", "symmetrisch" und "transitiv" sind also unabhängig voneinander.

Was ist also an der folgenden Behauptung und deren "Beweis" *falsch*? Sei M eine Menge und $\sim$ eine Relation, die symmetrisch und transitiv ist. Dann ist $\sim$ auch reflexiv. Denn sei $x \in M$ und sei $y \in M$ mit $x \sim y$. Dann gilt $y \sim x$ wegen der Symmetrie und mit der Transitivität folgt $x \sim x$. Also ist $\sim$ reflexiv.