Wintersemester 2010/2011 16.11.2011

Prof. Dr. Martin Möller
Dr. André Kappes

Lineare Algebra – Tutorium 5

Aufgabe 1 Es seien

$$U = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}] \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Gilt dann $v \in U$?

Aufgabe 2 Es seien

$$U = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}] \quad \text{und} \quad V = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$$

zwei Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$. Bestimme $U \cap V$.

Aufgabe 3 Es seien $U_1, U_2 \subseteq V$ zwei Untervektorräume eines K-Vektorraums V.

Zeige: $U_1 \cup U_2$ ist genau dann ein Untervektorraum von V, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

Aufgabe 4 Es sei K ein Körper. Für eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ mit Einträgen a_{ij} definieren wir die transponierte Matrix $A^T \in K^{n\times n}$ als die Matrix, deren (i, j)-ter Eintrag a_{ji} ist.

a) Berechne $(A + A^T)^T$ und $(A - A^T)^T$.

b) Es seien

$$V_s = \left\{A \in K^{n\times n} \mid A^T = A\right\}$$

und

$$V_a = \left\{A \in K^{n\times n} \mid A^T = -A\right\}.$$

Elemente in V_s heißen symmetrische Matrizen (wieso?), Elemente in V_a heißen schiefsymmetrische Matrizen.

Zeige: V_s und V_a sind Untervektorräume von $K^{n\times n}$.

c) Zeige: Wenn in K gilt: $1 + 1 \neq 0$, dann ist

$$K^{n\times n} = V_s \oplus V_a.$$

d) Was geht in c) schief, wenn $1 + 1 = 0$ in K gilt?

Aufgabe 5 Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume?

a) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 2y + x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$

b) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$

c) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\right\}$

d) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\right\}$

Aufgabe 6 *(optional)* Es sei V ein K-Vektorraum. Die Summe von zwei Untervektorräumen U_1, U_2 ist genau dann direkt, wenn $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, bzw. wenn sich jedes $v \in U_1 + U_2$ in eindeutiger Weise als $v = v_1 + v_2$ mit $v_i \in U_i$ schreiben lässt.

Es sei nun U_3 ein weiterer Untervektorraum von V und es gelte

$$U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{0\}.$$

Folgt daraus schon, dass für alle $v \in U_1 + U_2 + U_3$ eine eindeutige Darstellung

$$v = v_1 + v_2 + v_3$$

mit $v_i \in U_i$ $(i = 1, 2, 3)$ existiert?

Aufgabe 7 *(optional)* Es sei $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die gewöhnliche Multiplikation in $\mathbb{R}$.

a) Zeige, dass die abelsche Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ zu einem $\mathbb{Q}$-Vektorraum wird, wenn wir $\cdot$ im ersten Faktor auf $\mathbb{Q}$ einschränken.

b) Zeige: Im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ gilt $\sqrt{3} \notin [1, \sqrt{2}]$.