Wintersemester 2010/2011 02.11.2011

Prof. Dr. Martin Möller
Dr. André Kappes

Lineare Algebra – Tutorium 3

Aufgabe 1 Berechne die Produkte der folgenden Matrizen, soweit sie definiert sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 Schreibe die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(1-3i)^{-1} \qquad \frac{1+i}{1-i} \qquad \frac{5+27i}{i^3}$$

Aufgabe 3 Es sei R ein kommutativer Ring. Zeige: Dann ist der Polynomring $R[X]$ ebenfalls kommutativ.

Aufgabe 4 Bestimme die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 *(optional)* Es sei K ein Körper und $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in K^{p \times q}$. Weiter seien für $i_0 \in \{1, \ldots, p\}$ und $j_0 \in \{1, \ldots, q\}$ die Matrizen

$$\varepsilon_{i_0} = (b_{1k})_{1 \leq k \leq p} \in K^{1 \times p} \quad \text{mit } b_{1k} = \delta_{i_0 k} \quad (k = 1, \ldots, p)$$

und

$$e_{j_0} = (c_{k1})_{1 \leq k \leq q} \in K^{q \times 1} \quad \text{mit } c_{k1} = \delta_{j_0 k} \quad (k = 1, \ldots, q)$$

gegeben. Was ist $A \cdot e_{j_0}$ und $\varepsilon_{i_0} \cdot A$?

Aufgabe 6 *(optional)* Es sei K ein Körper und $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$ ein Polynom. Dann definiert f eine Abbildung

$$\Phi_f : K \to K, \quad \alpha \mapsto f(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i.$$

a) Zeige, dass man aus der Abbildung Φ_f im Allgemeinen nicht das Polynom f wiedergewinnen kann, d.h. die Abbildung

$$K[X] \to \mathrm{Abb}(K, K), \quad f \mapsto \Phi_f$$

ist nicht injektiv. (Hierbei ist $\mathrm{Abb}(K, K) = \{f : K \to K\}$ die Menge der Abbildungen von K nach K.)

Tipp: Nimm zum Beispiel $K = \mathbb{F}_2$, den Körper mit zwei Elementen.

b) Ein $\alpha \in K$ heißt Nullstelle von $f \in K[X]$, wenn $f(\alpha) = 0$ gilt. Wie viele verschiedene Nullstellen hat $f = X^2 + 1$ für $K = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{F}_2$?