

Prof. Dr. Martin Möller  
Dr. André Kappes

## Lineare Algebra – Tutorium 2

**Aufgabe 1** (*Untergruppenkriterium*) Es sei  $(G, *)$  eine Gruppe,  $H \subseteq G$  eine Untergruppe von  $G$  und  $\tilde{h} \in G$  ein Element. Zeige:

- a)  $\{g \in G \mid \forall h \in H : g * h * g^{-1} \in H\}$  ist eine Untergruppe von  $G$ .  
b) (optional)  $\{g \in G \mid g * \tilde{h} = \tilde{h} * g\}$  ist eine Untergruppe von  $G$ .

**Aufgabe 2** (*Permutationsgruppen*) Für  $n$  in  $\mathbb{N}$  sei  $S_n = S_{\{1, \dots, n\}}$  die Gruppe der Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$ .

- a) Schreibe

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in S_6 \quad \text{und} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_6$$

als Produkt von disjunkten Zykeln. Was ist  $\pi_1 \circ \pi_2$ ? Was ist  $\pi_2 \circ \pi_1$ ?

- b) Schreibe den Zykel  $\tau = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6) \in S_6$  in der Form von a). Was ist  $\tau^2, \tau^3, \tau^{-1}$  in Zykelschreibweise?  
c) (optional) Was ist  $(2 \ 5)\tau(2 \ 5)$  mit  $\tau$  aus b)? Was ist  $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$  für allgemeines  $\sigma \in S_6$ ?

**Aufgabe 3** (*Gruppenhomomorphismen*) Es seien  $G, H$  Gruppen und  $\varphi : G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus. Zeige:

- a)  $\varphi(e_G) = e_H$ .  
b)  $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$ .  
c) Ist  $\varphi$  bijektiv, so ist die Inverse (die Umkehrabbildung) auch ein Gruppenhomomorphismus.

**Aufgabe 4** Zeige: Es gibt kein  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  so dass  $m\sqrt{3} \in \mathbb{Z}$  ist.

Typ: Wie viele Lösungen hat die Gleichung  $3a^2 = b^2$  mit  $a, b \in \mathbb{Z}$  und  $a, b$  teilerfremd<sup>1</sup>?

<sup>1</sup>Zwei ganze Zahlen heißen teilerfremd, wenn ihr größter gemeinsamer Teiler gleich 1 ist.

**Aufgabe 5** (*Ring oder kein Ring?*) (optional) Welche der folgenden Teilmengen von  $\mathbb{R}$  sind Ringe (mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation von  $\mathbb{R}$ )?

a)  $2\mathbb{Z} = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \text{ ist gerade}\}.$

b)  $1 + 2\mathbb{Z} = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \text{ ist ungerade}\}.$

c)  $\mathbb{Z}_2 = \left\{\frac{a}{2^n} \in \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N}_0\right\}.$