Wintersemester 2011/2012 22.12.2011

Prof. Dr. Martin Möller
Dr. André Kappes

Lineare Algebra – Tutorium 10

Aufgabe 1 Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}\,.$$

Bestimme $\det(A)$.

Aufgabe 2 Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix mit den Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, wenn } i \neq j \\ 0 & \text{, wenn } i = j \end{cases}.$$

Bestimme $\det(A)$.

Aufgabe 3 Es sei K ein Körper und $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in K^{(p+q)\times(p+q)}$ mit $A \in K^{p\times p}$, $D \in K^{q\times q}$ und 0-Blöcken der entsprechenden Größe.
Zeige:

a) $M = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & E_q \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} E_p & 0 \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right)$.

b) $\det(M) = \det(A) \cdot \det(D)$.

Aufgabe 4 Es sei t ein reeller Parameter und

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t^2 \end{pmatrix}.$$

Bestimme alle t, für die A_t nicht invertierbar ist.

Aufgabe 5 Bestimme das Signum der Permutationen

$$\sigma = (3\ 5\ 1)(4\ 2\ 6)(7\ 8) \in S_8 \qquad \text{und} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in S_6.$$

Aufgabe 6 *(optional)* Es sei K ein Körper und A eine $n \times n$-Matrix deren Einträge alle in $\{0, 1\} \subseteq K$ liegen.

Für welche n gibt es ein A, so dass $\det(A) = 0$ für $K = \mathbb{F}_2$ ist, aber $\det(A) \neq 0$ für $K = \mathbb{Q}$?

Aufgabe 7 *(optional)* Es sei $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$.

Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) A^{-1} existiert und liegt in $\mathbb{Z}^{n \times n}$

b) $\det(A) \in \{\pm 1\}$.

Hinweis: Hier hilft Satz 9.20 und $\det(A) \in \mathbb{Z}$ *für* $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$.