Wintersemester 2010/2011 19.10.2011

Lineare Algebra – Tutorium 1

Aufgabe 1 *(Aussagen)*
Einige Abkürzungen aus der Aussagenlogik: $\wedge$ ("und"), $\vee$ ("oder"), $\neg$ ("nicht").

a) Bestimme die Negation der folgenden Aussagen

$$\exists p : (p \text{ ist Primzahl}) \wedge (p > 2)$$

$$\forall x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N} : x + y > 1$$

b) Was ist die Negation von "Jedes Übungsblatt schafft Unzufriedene"?

(i) "Es gibt kein Übungsblatt mit dem alle zufrieden sind."
(ii) "Es gibt einen, der mit allen Übungsblättern zufrieden ist."
(iii) "Es gibt ein Übungsblatt, mit dem alle zufrieden sind."
(iv) "Alle sind mit jedem Übungsblatt zufrieden."
(v) "Es gibt keinen, der mit allen Übungsblättern unzufrieden ist."

Aufgabe 2 *(De Morgan-Regeln)* Sei M eine Menge und $A, B \subset M$. Zeige:

a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ und $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

b) Sei I eine Menge (eine "Indexmenge") und für jedes $i \in I$ sei $A_i \subset M$ eine Menge. Dann gilt:

$$\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \quad \text{und} \quad \bigcap_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}.$$

Aufgabe 3 *(Abbildungen, injektiv, surjektiv)* Es seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Für $X \subset A$ und $Y \subset B$ definieren wir die Mengen

$$f(X) = \left\{ y \in B \mid \exists x \in X : y = f(x) \right\}. \quad \text{(Das Bild von } A \text{ unter } f\text{)}$$

und

$$f^{-1}(Y) = \left\{ x \in A \mid f(x) \in Y \right\}. \quad \text{(Das Urbild von } B \text{ unter } f\text{)}.$$

Zeige:

a) Es gilt für alle $X \subset A$: $f^{-1}(f(X)) \supseteq X$ und $=$ falls f injektiv ist.

b) Es gilt für alle $Y \subset B$: $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$ und $=$ falls f surjektiv ist.

c) Finde Beispiele für f, wo $f^{-1}(f(X)) \subseteq X$, bzw. $f(f^{-1}(Y)) \supseteq Y$ nicht gilt.

Aufgabe 4 *(Gruppen)*

a) Es sei $G = \{-1, 1\} \subset \mathbb{Z}$. Mit der gewöhnlichen Multiplikation von $\mathbb{Z}$ wird dies zu einer Gruppe. Stelle die Verknüpfungstafel von G auf.

b) Es sei $(G, *)$ eine Gruppe und $h \in G$. Wir definieren eine Abbildung

$$\varphi_h : G \to G, \quad g \mapsto h * g.$$

Zeige, dass φ_h bijektiv ist. Was bedeutet dies für die Verknüpfungstafel einer Gruppe?

c) Welche der folgenden Mengen sind Gruppen?

- $\mathbb{P} \cup (-\mathbb{P}) \cup \{1, -1\}$ mit der Addition aus $\mathbb{Z}$ (Hierbei ist $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, \dots\} \subset \mathbb{N}$ die Menge der Primzahlen und $-\mathbb{P} = \left\{q \in \mathbb{Z} \mid -q \in \mathbb{P}\right\}$.)
- $\mathbb{Z}$ mit der Multiplikation als Verknüpfung.
- $M = \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 0\right\}$ mit der Verknüpfung

$$(f \boxplus g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (f \boxplus g)(x) := f(x) + g(x).$$

Aufgabe 5 *(Russels Antinomie)* Wieso definiert das Folgende keine Menge

$$M = \left\{x \mid x \notin x\right\}?$$