Prof. Dr. M. Möller
Quentin Gendron
Kolja Hept

WS 2011/12
Frankfurt/M., 26. Oktober 2011

Lineare Algebra

Übungsblatt 2[1]

Aufgabe 1

Seien $(G, *)$ und $(H, \star)$ Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus.

a. Zeigen Sie, dass φ genau dann injektiv ist, wenn $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\mathrm{e_G}\}$.

b. Zeigen Sie, dass das Bild $\varphi(G)$ eine Untergruppe von H ist.

Aufgabe 2

Im Folgenden seien $+$ und $\cdot$ die übliche Addition bzw. Multiplikation in $\mathbb{R}$.

a. Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ bezüglich $+$ eine Gruppe bilden:

   (i) $\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$
   (ii) $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\mathbb{Z} = \{a + \frac{1}{2}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

b. Sind sie Ringe bezüglich $+$ und $\cdot$?

c. Sind sie Körper bezüglich $+$ und $\cdot$? Man kann benutzen, dass gilt: $\forall k \in \mathbb{Z}$ ist $k\sqrt{5} \notin \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3

a. Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $h \in G$. Zeigen Sie, dass

$$\varphi_h : G \to G,\ g \to h * g * h^{-1}$$

ein Isomorphismus ist. Was ist der inverse Homomorphismus zu φ_k?

b. Sei $(G, *)$ eine kommutative Gruppe, $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass

$$\varphi_n : G \to G,\ g \to g^n$$

ein Homomorphismus ist. Geben Sie ein Beispiel für eine Gruppe an, für die φ_n kein Homomorphismus ist.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle Untergruppen mit vier Elementen der symmetrischen Gruppe S_4.

[1] *auch im Internet unter*
http://www.uni-frankfurt.de/fb/fb12/mathematik/ag/personen/lehnert_ralf/LAWS1112/index.html
und im e-Learning System OLAT