Prof. Dr. M. Möller
Quentin Gendron
Kolja Hept

WS 2011/12
Frankfurt/M., 18. Januar 2012
Abgabetermin: 26.01.2012

Lineare Algebra

Übungsblatt 12[1]

Aufgabe 1

Sei
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$
Das ist die Matrix von Blatt 11, Aufgaben 1 und 2, mit $\zeta = 1$.
Sei $P := X^7 - 3X^6 + 6X^4$. Berechnen Sie $P(A)$ mit Hilfe der Ergebnisse von Blatt 11.

Aufgabe 2

i) Seien $f,\ g$ zwei Endomorphismen eines Vektorraums V. Zeigen Sie: Wenn eine Basis von V existiert, sodass die Abbildungsmatrizen A_f und A_g bezüglich dieser Basis diagonal sind, dann gilt $f \circ g = g \circ f$.

ii) Seien f und $g \in \mathrm{End(V)}$ diagonalisierbar. Gilt immer $f \circ g = g \circ f$?

iii) Seien $A,\ B \in K^{n\times n}$, sodass $AB = BA$. Wir definieren $E_\lambda(A)$ als den Eigenraum von A zum Eigenwert λ. Zeigen Sie, dass $x \in E_\lambda(A)$ auch $Bx \in E_\lambda(A)$ impliziert.

Aufgabe 3

Seien $a_i \in \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

i) Für welche a_i ist diese Matrix diagonalisierbar?

ii) Berechnen Sie in diesem Fall eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine invertierbare Matrix $Q \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$, sodass $Q^{-1}AQ = D$ gilt.

Aufgabe 4

Sei $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & \sqrt{3} \\ 9 & \frac{11}{2} & -\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

i) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, sodass eine invertierbare Matrix $Q \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{C})$ mit $Q^{-1}AQ = D$ existiert.

ii) Berechnen Sie A^{2012}.

[1] *auch im Internet unter*
http://www.uni-frankfurt.de/fb/fb12/mathematik/ag/personen/lehnert_ralf/LAWS1112/index.html
und im e-Learning System OLAT