Prof. Dr. M. Möller
Quentin Gendron
Kolja Hept

WS 2011/12
Frankfurt/M., 11. Januar 2012
Abgabetermin: 19.1.2012

Lineare Algebra

Übungsblatt 11[1]

Aufgabe 1

Sei $\zeta \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_\zeta \in \mathbb{R}[X]$ von

$$A := \begin{pmatrix} \zeta & 2-\zeta & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3\zeta - 6 & 6 - 3\zeta & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Aufgabe 2

Sei $\zeta \in \mathbb{R}$ und A die Matrix aus Aufgabe 1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte λ sowie die zugehörigen Eigenräume $E_\lambda(A)$ von A.

Aufgabe 3

Sei V ein Vektorraum über dem Körper K.
$\pi \in \mathrm{End(V)}$ heißt *Projektion*, falls $\pi^2 = \pi$ gilt (vgl. Blatt 7, Aufgabe 3).

i) Zeigen Sie, dass für jeden Eigenwert λ einer Projektion gilt: $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$.

ii) Seien $a, b \in K$ mit $a \neq b$, $P = (X-a)(X-b) \in K[X]$ und $\phi \in \mathrm{End(V)}$ mit $P(\phi) = 0$. Zeigen Sie, dass dann die beiden Endomorphismen

$$\pi_a := \frac{1}{b-a}(\phi - a \cdot \mathrm{id}_V) \text{ und } \pi_b := \frac{1}{a-b}(\phi - b \cdot \mathrm{id}_V)$$

Projektionen sind.

iii) Zeigen Sie: $\mathrm{Bild}(\pi_a) = \mathrm{Kern}(\pi_b)$.

Aufgabe 4

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ 0 & & & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & & & 0 \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{n\times n},$$

und bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

[1] *auch im Internet unter*
http://www.uni-frankfurt.de/fb/fb12/mathematik/ag/personen/lehnert_ralf/LAWS1112/index.html
und im e-Learning System OLAT