Prof. Dr. M. Möller
Quentin Gendron
Kolja Hept

WS 2011/12
Frankfurt/M., 22. Dezember 2011
Abgabetermin: 12.01.2012

Lineare Algebra

Übungsblatt 10[1]

Aufgabe 1

Sei $\mu \in \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & \mu & 1 \\ 2 & 3 & \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

i) Berechnen Sie $\det(A)$.

ii) Für welche μ ist A invertierbar? Berechnen Sie in diesem Fall die Inverse von A.

Aufgabe 2

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{4\times 4}$. Berechnen Sie $\det(A)$ für $K = \mathbb{Q}$ und $K = \mathbb{F}_2$.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper.

i) Zeigen Sie, dass $\{A \in \mathrm{GL}_n(K) \mid \det(A) = 1\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$ ist.

ii) Zeigen Sie, dass $\det : (M_n(K), +) \to (K, +)$ im Allgemeinen kein Gruppenhomomorphismus ist.

iii) Sei $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in K^{(p+q)\times(p+q)}$
mit $A \in K^{p\times p}$, $B \in K^{p\times q}$, $C \in K^{q\times p}$ und $D \in K^{q\times q}$.
Zeigen Sie: Falls $B = 0$ oder $C = 0$, dann ist $\det(M) = \det(A) \cdot \det(D)$.

Aufgabe 4

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$.

i) Berechnen Sie $\det(A)$.

ii) Für welche a_i, b_j ist A invertierbar?

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!

[1] *auch im Internet unter* http://www.uni-frankfurt.de/fb/fb12/mathematik/ag/personen/lehnert_ralf/LAWS1112/index.html *und im e-Learning System* OLAT