Skript zur Vorlesung

Geometrie (2std.)

Sommersemester 2011
Frankfurt am Main

Prof. Dr. Martin Möller

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Geometrie wird im Rahmen dieser Vorlesung „affine Geometrie“ bedeuten. Im zweiten Teil werden wir Begriffe der affinen Geometrie wie Parallelität, Schneiden, Abstand, Winkel und Orthogonalität kennenlernen. Andere wichtige, aber weniger anschauliche Geometriebegriffe, insbesondere hyperbolische und sphärische Geometrie werden in vertiefenden Vorlesungen behandelt. Zuvor müssen wir Begriffe wie Norm und Metrik auf einem Vektorraum einführen, um daraus den Abstandsbegriff der affinen Geometrie abzuleiten. Diesem liegt wiederum der Begriff des Skalarprodukts zugrunde.

Quellen und Literatur: Zahlreiche Bücher, zumeist mit dem Titel „Lineare Algebra“, umfassen den ersten Teil dieser Vorlesung, zum Beispiel das Buch von S. Bosch. Ebenso viele Skripten, z.B. Lineare Algebra I von A. Werner (Frankfurt) oder F. Herrlich und S. Kühnlein (Karlsruhe), sowie H.Kuhnle, G.Aumann und K.Schober (Karlsruhe) decken diesen Stoff ab und sind zum größten Teil Grundlage dieses Skripts.

1 Skalarprodukte

Wir wollen Vektorräume mit einem Abstandsbegriff versehen und der Abstand zweier Vektoren soll stets nicht-negativ sein. Dies zwingt uns, $\mathbb{R}-$Vektorräume und $\mathbb{C}-$Vektorräume (leicht) unterschiedlich zu behandeln. Wir schreiben K für einen beliebigen Körper. Sei V ein $K-$Vektorraum.

Definition 1.1 *Eine* Bilinearform *über V ist eine Abbildung*

$$F\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v,w) \mapsto F(v,w),$$

die in beiden Argumenten linear ist, d.h. es gilt für alle $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V,\ \alpha, \beta \in K$:

$$\begin{aligned} F(\alpha v_1 + \beta v_2, w_1) &= \alpha\, F(v_1, w_1) + \beta\, \mathbb{F}(v_2, w_1) \\ F(v_1, \alpha w_1 + \beta w_2) &= \alpha\, F(v_1, w_1) + \beta\, F(v_1, w_2). \end{aligned}$$

Die Bilinearform heißt symmetrisch, *falls für alle* $v, w \in V$ *gilt:* $F(v,w) = F(w,v)$.

1.1 Euklidische Vektorräume

Wir nennen eine Bilinearform F *positiv definit*, wenn für alle $v \in V$ gilt: $\quad F(a,a) > 0.$

Für $K = \mathbb{R}$ ist dies die gewünschte Zusatzeigenschaft, die Geometrie auf dem $\mathbb{R}-$Vektorraum möglich macht.

Definition 1.2 *Eine positiv definite, symmetrische Bilinearform F auf dem $\mathbb{R}-$Vektorraum V heißt* Skalarprodukt. *Das Paar (V,F) wird euklidischer Vektorraum genannt.*

Beispiel 1.3 i) Auf $V = \mathbb{R}^n$ ist

$$\begin{aligned} F_0\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \big((\alpha_1,\ldots,\alpha_n),(\beta_1,\ldots,\beta_n)\big) &\longmapsto \sum_{j=1}^n \alpha_j\beta_j \end{aligned}$$

ein Skalarprodukt: Bilinearität und Symmetrie prüfe der Leser direkt nach. Zur positiven Definitheit zeigt man zuerst, dass für alle $v = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

$$F_0(v,v) = \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \geq 0$$

gilt und dass $\sum\limits_{j=1}^n \alpha_j^2 = 0$ ist genau dann, wenn $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ ist, also wenn $v = 0$ ist.

ii) $F_1\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\big((\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\big) \mapsto \alpha_1\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 - \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_3\beta,$$

ist ebenfalls ein Skalarprodukt, denn es ist für $v = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$
$F_1(v_1v) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + (\alpha_2 - \alpha_3)^2$.

iii) $F_2\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$\big((\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)\big) \longrightarrow \alpha_1\beta_1$

ist eine symmetrische Bilinearform, aber kein Skalarprodukt, denn $F_2\big((0,1),(0,1)\big) = 0$.

1.2 Unitäre Vektorräume

Auch für einen $\mathbb{C}-$Vektorraum könnte man nach positiv definiten, symmetrischen Bilinearformen suchen. Das Problem ist nur, dass es einfach keine gibt, wenn der Vektorraum V nicht der Nullraum ist. Denn angenommen, F sei positiv definit und linear und $v \in V$, so ist

$$F(ia, ia) = i^2 F(a, a) = -F(a, a)$$

und es können nicht $F(a, a)$ und $F(ia, ia)$ positiv sein.

Wenn man sich daran erinnert, dass der komplexe Betrag $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$ die Zahl mit dem komplex Konjugierten von z multipliziert, ist folgende Definition nicht mehr so fernliegend.

Definition 1.4 *Sei V ein $\mathbb{C}-$Vektorraum. Eine* Hermitesche Form *(oder Sesquilinearform) ist eine Abbildung*

$$H \colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C},\ (v, w) \mapsto H(v, w)$$

mit der Eigenschaft, dass für alle $v_1, v_2, v, w \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} H(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) &= \lambda_1 H(v_1, w) + \lambda_2 H(v_2, w) \\ H(v, w) &= \overline{H(w, v).} \end{aligned}$$

Unmittelbare Konsequenz hieraus sind die Eigenschaften

$$H(v, v) \in \mathbb{R},$$

$$H(v, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2) = \overline{\mu_1} H(v, w_1) + \overline{\mu_2} H(v, w_2),$$

für alle $v, w_1, w_2 \in V$ und alle $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$. Wir rechnen die zweite nach:

$$\begin{aligned} H(v, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2) &= \overline{H(\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2, v)} = \overline{\mu_1}\,\overline{H(w_1, v)} + \overline{\mu_2}\,\overline{H(w_2, v)} \\ &= \overline{\mu_1} H(v, w_1) + \overline{\mu_2} H(v, w_2). \end{aligned}$$

Definition 1.5 *Ein* Skalarprodukt *auf einem $\mathbb{C}-$Vektorraum V ist eine positiv definite Hermitesche Form H. Analog zum reellen Fall heißt eine Hermitesche Form positiv definit, falls für alle $v \in V \backslash \{0\}$ gilt $H(v, v) > 0$. Das Paar (V, H) wird unitärer Vektorraum genannt.*

Beispiel 1.6 Die Abbildung

$$H_0\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \qquad \big((\alpha_1,\dots,\alpha_n),(\beta_1,\dots,\beta_n)\big) \mapsto \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot \overline{\beta_j}$$

ist ein Skalarprodukt. Wir prüfen nur positive Definitheit und überlassen die Verifikation der Hermiteeigenschaft dem Leser. Es ist

$$H_0\big((\alpha_1,\dots,\alpha_n),(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\big) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot \overline{\alpha_j} = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 > 0.$$

für alle $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \neq (0,\dots,0)$. Das Skalarprodukt H_0 wird *Standardskalarprodukt* genannt.

Wenn klar ist, welches Skalarprodukt auf V gemeint ist, werden wir oft die Schreibweise $\langle v, w\rangle$ statt $F(v,w)$ bzw. $H(v,w)$ im reellen bzw. im komplexen Fall verwenden.

1.3 Matrixdarstellung eines Skalarprodukts

Sei $B = \{b_1,\dots,b_n\}$ eine Basis des Vektorraums V. Wir wollen den Wert eines Skalarprodukts $F(v,w)$ bzw. $H(v,w)$ bestimmen, wenn wir nur die Werte $F(b_i,b_j)$ bzw. $H(b_i,b_j)$ kennen. Dies gelingt immer und wir führen dabei die zum Rechnen angenehme Matrixdarstellung ein. Wir behandeln den Fall eines unitären Vektorraums ausführlich. Wir schreiben die Vektoren $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j$ und $w = \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j$ in ihrer Basisdarstellung und es sei G die Matrix

$$G = (g_{jk})_{j,k=1\dots n} \quad , \quad g_{jk} = H(b_j, b_k).$$

Dann gilt aufgrund der Hermite -Eigenschaft

$$\begin{aligned} H(v,w) &= \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j g_{jk} \overline{\beta_k} = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_n} \end{pmatrix} \\ &= (\overrightarrow{v})^\top G \overline{w}, \end{aligned}$$

wobei $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ den Koordinatenvektor von v bzw. w in der Basis B bezeichnet.

Definition 1.7 *Für eine Matrix $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sei $A^* = \overline{A}^\top$. Eine Matrix mit der Eigenschaft $A^* = A$ wird* hermitesch *genannt, eine Matrix mit der Eigenschaft $A^\top = A$ wird* symmetrisch *genannt.*

Wir fassen also zusammen: Die Matrix $G = (g_{jk})$ mit Einträgen $g_{jk} = H(b_j, b_k)$ im unitären Fall bzw. $g_{jk} = F(b_j, b_k)$ im reellen Fall wird *Fundamentalmatrix* des Skalarprodukts in der Basis B genannt. Sie ist hermitesch bzw. symmetrisch.

Schließlich untersuchen wir das Verhalten von G unter Basiswechsel. Sei $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ eine weitere Basis, die aus B durch

$$\begin{array}{ccccc} c_1 & = & \lambda_{11}b_2+ & \cdots & +\lambda_{n1}b_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_n & = & \lambda_{1n}b_1+ & \cdots & +\lambda_{nn}b_n \end{array}$$

hervorgeht. Die Transformationsmatrix

$$\Theta_{BC} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix},$$

in deren Spalten (!) die Koeffizienten von n in der Basis B stehen, führt den Koordinatenvektor $\overrightarrow{v_C}$ von v in der Basis C in den Koordinatenvektor $\overrightarrow{v_B}$ von v in der Basis B über.
(Man überprüft leicht die Richtigkeit des Verfahrens, indem man die Wirkung auf die Koordinateneinheitsvektoren in der Basis C verifiziert.) Sei G_C die Fundamentalmatrix von H in der Basis C, d.h. $G_C = (a_{ij})_{i,j=1\ldots n}$ mit $a_{ij} = H(c_i, c_j)$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} a_{ij} &= H(c_i, c_j) = H\big(\sum_{s=1}^{n} \lambda_{si} \cdot b_s, \sum_{t=1}^{n} \lambda_{tj} b_z\big) \\ &= \sum_{s,t=1}^{n} \lambda_{si}\overline{\lambda_{tj}} H(b_s, b_t) = \sum_{s,t=1}^{n} \lambda_{si} \cdot g_{st} \cdot \overline{\lambda_{tj}}, \end{aligned}$$

also

$$G_C = \Theta_{BC}^\top \, G \, \overline{\Theta_{BC}}. \tag{1}$$

Der Leser prüft im Fall eines euklidischen Vektorraums (V, F) die entsprechende Beziehung

$$G_C = \Theta_{BC}^\top \, G \, \Theta_{BC}$$

leicht selbst nach.

1.4 Normierte Vektorräume

In diesem Abschnitt wollen wir euklidische und unitäre Vektorräume parallel behandeln. Wir sprechen, beide Fälle zusammenfassend, von einem *metrischen* Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Wir führen zunächst den Begriff einer Norm ein und leiten daraus später einen Abstandsbegriff (eine Metrik) ab — woraus sich die Bezeichnung rechtfertigt. Wir schreiben K für den Körper, um beide Fälle $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$ gemeinsam zu behandeln.

Definition 1.8 *Sei V ein metrischer Vektorraum. Dann heißt*

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

die Norm *des Vektors $v \in V$.*

Hierbei verwenden wir stets die nicht-negative Wurzel, d.h. $\|v\| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Satz 1.9 *(Cauchy-Schwarz-Ungleichung). In einem metrischen Vektorraum V gilt für alle $v, w \in V$ die Abschätzung*

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

Es gilt Gleichheit genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis : Wir nehmen an, dass V ein unitärer Vektorraum ist, und überlassen dem Leser die Anpassung an den Fall des euklidischen Vektorraums.
Ist $v = 0$, so gilt offenbar Gleichheit. Sind v, w linear abhängig und $v \neq 0$, so gibt es $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $w = \lambda \cdot v$, also ist $\langle v, w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle$ und $\overline{\langle v, w\rangle} = \lambda\overline{\langle v, v\rangle} = \lambda\langle v, v\rangle$. Zusammen multipliziert erhält man also

$$|\langle v, w\rangle|^2 = \langle v, w\rangle\overline{\langle v, w\rangle} = \lambda\overline{\lambda}\|v\|^2 \cdot \langle v, v\rangle = \|v\|^2\|w\|^2$$

und durch Quadratwurzelziehen die Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.
Sind v, w linear unabhängig, so ist $v - \lambda w \neq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\langle w, w\rangle > 0$, da $w \neq 0$. Also

$$0 < \langle v - \lambda w, v - \lambda w\rangle = \langle v, v\rangle - \lambda\langle w, v\rangle - \overline{\lambda}\langle v, w\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle.$$

Nimmt man speziell $\lambda = \frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}$, so erhält man

$$0 < \langle v, v\rangle - \frac{\langle v, w\rangle\overline{\langle v, w\rangle}}{\langle w, w\rangle} - \frac{\overline{\langle v, w\rangle}\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} + \frac{\langle v, w\rangle\overline{\langle v, w\rangle}}{\langle w, w\rangle^2}\langle w, w\rangle.$$

Durchmultiplizieren mit $\langle w, w\rangle$ ergibt

$$0 < \langle v, v\rangle \cdot \langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle\overline{\langle v, w\rangle} = \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - |\langle v, w\rangle|^2$$

und damit die Behauptung. $\square$

Wir halten nun einige Eigenschaften der Norm fest, die sich aus den Eigenschaften eines Skalarprodukts ergeben.

Proposition 1.10 *Für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in K$ gilt*

$$\begin{array}{ll} \text{(Definitheit)} & \|v\| \geq 0 \quad \text{und} \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0, \\ \text{(Homogenität)} & \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|, \\ \text{(Dreiecksgleichung)} & \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|. \end{array}$$

Beweis : Die erste Bedingung folgt aus der positiven Definitheit.
Die Homogenität folgt aus

$$\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \|v\|^2} = |\lambda| \cdot \|v\|.$$

Für die Dreiecksungleichung berechnen wir

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle \\ &= \|v\|^2 + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \|w\|^2 \\ &= \|v\|^2 + \langle v, w\rangle + \overline{\langle v, w\rangle} + \|w\|^2 \\ &= \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle v, w\rangle) + \|w\|^2. \end{aligned}$$

Setzen wir $\langle v, w\rangle = \alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist

$$\mathrm{Re}(\langle v, w\rangle) = \alpha \leqslant \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = |\langle v, w\rangle|\,.$$

Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &\leqslant \|v\|^2 + 2\,|\langle v, w\rangle| + \|w\|^2 \\ &\leqslant \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2\,. \end{aligned}$$

$\square$

Definition 1.11 *Sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum. Eine Abbildung*

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v \longmapsto \|v\|,$$

welche (Definitheit), (Homogenität) und (Dreiecksungleichung) erfüllt, heißt Norm. *Dann heißt* $(V, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum.

Jeder euklidsche oder unitäre Vektorraum ist also auch ein normierter Vektorraum. Wir untersuchen die Umkehrung. Jede Norm, die von einem Skalarprodukt herkommt, erfüllt die Parallelogrammidentität

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2,$$

denn

$$\begin{aligned}
&\langle v+w, v+w\rangle + \langle v-w, v-w\rangle = \\
&= \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle + \langle v,v\rangle - \langle v,w\rangle - \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle \\
&= 2\langle v,v\rangle + 2\langle w,w\rangle.
\end{aligned}$$

Proposition 1.12 *Auf einem normierten Vektorraum V gibt es ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ mit $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$ genau dann, wenn die Norm die Parallelogrammidentität erfüllt. In diesem Fall ist das Skalarprodukt gegeben durch*

$$\langle v,w\rangle = \frac{1}{2}(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2).$$

Beweis : Übungsaufgabe □

1.5 Winkel und Orthogonalität

Nehmen wir an $V = \mathbb{R}^n$ und zwei Vektoren v, w seien durch „Pfeile“ („Richtungsvektoren“) im Nullpunkt beginnend repräsentiert.

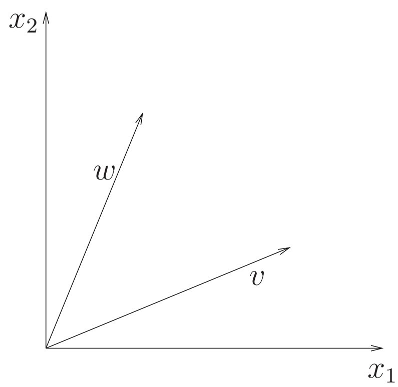

Abbildung 1: Winkel zwischen zwei Richtungsvektoren im $\mathbb{R}^2$

Der geometrischen Figur, ein Winkel mit Schenkeln v und w, wollen wir eine Zahl zuordnen. Diese bezeichnen wir auch mit Winkel, (obwohl vielleicht „Winkelmaß“ zur Unterscheidung der Begriffe genauer wäre). Aufgrund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist

$$-1 \leqslant \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \leqslant 1$$

und aus der Analysis ist bekannt, dass

$$\begin{array}{rccc} & [0, \pi] & \longmapsto & [-1, 1] \\ \cos: & \alpha & \longmapsto & \cos(\alpha) \end{array}$$

bijektiv und streng monoton fallend. Also ist folgender Begriff wohldefiniert:

Definition 1.13 *Sei V euklidischer Vektorraum und $v, w \in V \setminus \{o\}$. Die Zahl $\alpha \in [o, \pi]$ mit*

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

heißt Winkel (*Bezeichnung:* $\omega(v, w)$) *zwischen den Vektoren v und w.*

Bei diesem Zugang wirkt (und ist) die Skalierung des Winkels mit $\cos(\cdot)$ willkürlich. Man hätte alle Informationen über die geometrische Figur „Winkel“ auch durch das Wissen von $\frac{\langle v,w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$. Hingegen ist „Null“ in jedem Körper intrinsisch. Wir geben daher dem Fall $\langle v, w \rangle = 0$ (d.h. $\omega(v, w) = \pi/2$) gesondert einen Namen.

Definition 1.14 *Sei V ein metrischer Vektorraum. Zwei Vektoren $v, w \in V$ mit $\langle v, w \rangle = 0$ heißen* orthogonal.

Orthogonale Vektoren sind nützlich zum effizienten Ausrechnen von Skalarprodukten. Wir beschreiben daher im Folgenden ein Verfahren, das aus einer beliebigen Basis eine Basis mit paarweise orthogonalen Vektoren erstellt.

Definition 1.15 *Eine Menge $M \subseteq V$ eines metrischen Vektorraums heißt* Orthogonalsystem, *falls $M \neq \emptyset$, $0 \notin M$ und $\langle v, w \rangle = 0$ für alle $v \neq w \in M$. Ist M zudem eine Basis von V, so heißt M* Orthogonalbasis. *Gilt zudem $\|v\| = 1$ für alle $v \in M$, so sprechen wir von einem Orthonormalsystem bzw. einer Orthonormalbasis.*

Satz 1.16 (Gram-Schmidt) *Sei V ein metrischer Vektorraum. Jedes Orthogonalsystem M von V ist linear unabhängig. Zu jeder Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ von V gibt es ein Orthogonalsystem $\{c_1, \ldots, c_n\}$ mit*

$$[c_1, \ldots, c_r] = [b_1, \ldots, b_r] \quad \textit{für alle} \quad r = 1, \ldots, n.$$

Beweis : Für die erste Aussage nehmen wir an, es gäbe $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq M$ und $\alpha_i \in K$ mit $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0$. Dann ist $\langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i, v_j \rangle = 0$ für alle j, also $\alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = 0$. Wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts folgt $\alpha_j = 0$ für alle $j = 1, \ldots, k$.
Die zweite Aussage beweisen wir durch Induktion nach r. Für $r = 1$ nehmen wir $c_1 = b_1$. Zum Induktionsschritt setzen wir voraus, dass $c_1, \ldots, c_{r-1}$ bereits die geforderte Eigenschaft besitzt. Aus dem Ansatz $c_r = b_r + \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_{r-1} c_{r-1}$ und der Forderung $\langle c_r, c_k \rangle = 0$ für alle $k = 1, \ldots, r-1$ folgt

$$\langle b_r, c_k \rangle + \lambda_k \langle c_k, c_k \rangle = 0$$

Also setzen wir $\lambda_k = -\frac{\langle b_r, c_k \rangle}{\langle c_k, c_k \rangle}$ und somit

$$c_r = b_r - \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\langle b_r, c_k \rangle}{\langle c_k, c_k \rangle} \cdot c_k.$$

Damit sind alle Orthogonalbedingungen erfüllt und es gilt $[c_1, \ldots, c_r] = [b_1, \ldots, b_r]$. Zudem ist $c_r \neq 0$, denn sonst wäre $b_r \in [c_1, \ldots, c_{r-1}] = [b_1, \ldots, b_r]$ im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von B. □

Bemerkung 1.17 Ist $M \subset V$ ein Orthogonalsystem, so ist $N = \{\frac{m}{\|m\|}, m \in V\}$ ein Orthonormalsystem. Auf gleiche Weise erhält man aus einer Orthogonalbasis eine Orthonormalbasis.

Proposition 1.18 *Die Fundamentalmatrix eines Skalarprodukts bezüglich einer Orthonormalbasis ist die Einheitsmatrix. Umgekehrt ist die Fundamentalmatrix eines Skalarprodukts in einer Basis B die Einheitsmatrix, so ist B eine Orthonormalbasis.*

Beweis : B ist Orthonormalbasis genau dann, wenn der Eintrag g_{ij} der Fundamentalmatrix

$$g_{ij} = \langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$$

ist, also G_B die Einheitsmatrix ist. □

1.6 Orthogonales Komplement

Sei V ein metrischer Vektorraum und W ein Untervektorraum.

Definition 1.19 *Die Menge $W^\perp = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0\} \forall w \in W$ heißt* orthogonales Komplement *zu W in V.*

Der Leser überzeugt sich leicht davon, dass $W^\perp$ ein Untervektorraum von V ist. Wir fassen weitere Eigenschaften, die unmittelbar aus der Definition folgen, zusammen.

Proposition 1.20 *Es ist* $W \cap W^\perp = \{0\}$ *und* $W \subseteq (W^\perp)^\perp$. *Ist* $\dim V = n < \infty$, *so ist* $\dim W^\perp = n - \dim W$ *und es gilt* $W = (W^\perp)^\perp$.

Beweis : Ist $w \in W \cap W^\perp$, so ist $\langle w, w\rangle = 0$, also $w = 0$. Es gilt

$$(W^\perp)^\perp = \{v \in V : \forall x \in W^\perp : \langle v, x\rangle = 0\}.$$

Ist also $w \in W$, so ist $\langle w, x\rangle = 0$ für alle $x \in W^\perp$, und daher $w \in (W^\perp)^\perp$. Sei nun $\dim V = n$. Die zweite Aussage der Proposition ist trivialerweise richtig für $W = \{0\}$ oder $W = V$. In den anderen Fällen sei $B_W = \{b_1, \ldots, b_k\}$ eine Basis von W und $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Ergänzung zu einer Basis von V. Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert eine Orthogonalbasis $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ von V, derart, dass

$$[c_1, \ldots, c_k] = [b_1, \ldots, b_k] = W$$

ist. Offenbar ist $W^\perp \supseteq [c_{k+1}, \ldots, c_n]$. Ist $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i c_i$ ein beliebiges Element von $W^\perp$, so ist für $j = 1, \ldots, k$

$$0 = \langle x, c_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i, c_j\rangle = \lambda_j \langle c_j, c_j\rangle,$$

also $\lambda_j = 0$. Daraus folgt $W^\perp = [c_{k+1}, \ldots, c_n]$. Mit dem gleichen Argument folgt nun

$$(W^\perp)^\perp = [c_1, \ldots, c_k] = W$$

und auch die Dimensionsaussage. □

Der Beweis dieser Proposition gibt eine Strategie dafür, wie man das Orthogonale Komplement in der Praxis findet.

Beispiel 1.21 Sei $V = \mathbb{R}^3, W = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]$. Diese Basis wird durch $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ zu einer Basis von V ergänzt. Nach Gram-Schmidt ist $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\1\\-1/2\end{pmatrix}\right\}$ eine Orthogonalbasis von W und

$$c_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1/2\\1\\-1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\-1/3\end{pmatrix}.$$

Also ist $W^\perp = [c_3]$.

Wir betrachten weiterhin die Situation $\dim V = n$. Dann ist $V = W \oplus W^\perp$. Oftmals ist es nützlich einen beliebigen Vektor $v \in V$ als $v = w + x$ mit $w \in W$ und $x \in W^\perp$ zu schreiben. Insbesondere ist eine solche Summenschreibweise eindeutig. Die Abbildung

$$\pi : \begin{cases} V & = W \oplus W^\perp \quad \longrightarrow V \\ v & = w + x \qquad \longmapsto w \end{cases}$$

ist linear. Sie wird *Orthogonale Projektion* auf W genannt. Wir fassen ihre wesentlichen Eigenschaften zusammen.

Proposition 1.22 *Ist π die orthogonale Projektion auf W, so ist Bild $(\pi) = W$,* $\mathrm{Ker}(\pi) = W^\perp$ *und $\pi^2 = \pi$. Es gilt $\|\pi(v)\| \leq \|v\|$ und, falls $C_W = \{c_1, \ldots, c_k\}$ eine Orthonormalbasis von W ist, so gilt für alle $v \in V$*

$$\pi(v) = \sum_{j=1}^{k} \langle v, c_j \rangle \cdot c_j.$$

Beweis : Die Aussagen über Bild und Kern sind klar. Ist $v \in \mathrm{Bild}(\pi) = W$, so ist $\pi(v) = v$, also ist $\pi^2 = \pi$. Es gilt aufgrund der Orthogonalität

$$\langle v, v \rangle = \langle w + x, w + x \rangle = \langle w, w \rangle + \langle x, x \rangle \geqslant \langle w, w \rangle$$

und daher $\quad \|\pi(v)\| \leqslant \|v\|$.

Für die letzte Aussage ergänzen wir C_W zu einer Orthonormalbasis $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ von ganz V. Ist $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i c_i$, so ist $w = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i c_i$ und $x = \sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i c_i$. Es gilt $\langle v, c_j \rangle = \lambda_j$ und daher $\pi(v) = w = \sum\limits_{j=1}^{k} \langle v, c_j \rangle \cdot c_j$. □

1.7 Ein Definitheitskriterium

Sei $G = G_B$ die Fundamentalmatrix einer symmetrischen Bilinearform bzw. hermitschen Form. Die Eigenschaften symmetrisch oder hermitsch können wir $G \in \mathrm{Mat}(n, n)$ schnell ansehen. Gesucht ist ein einfaches Kriterium, das entscheidet, ob die Form, die G darstellt, positiv definit ist. Dies ist offenbar äquivalent dazu, dass $v^\top G\, \overline{v} > 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ ist. Wir nennen eine solche Matrix *positiv definit*.

Lemma 1.23 *Ist G positiv definit, so ist* $\det G$ *reell und positiv.*

Beweis : Nach dem Satz von Gram-Schmidt besitzt V eine Orthonormalbasis C. Bezüglich dieser ist die Fundamentalmatrix G_C die Einheitsmatrix. Wir hatten in (1) die Basiswechseleigenschaft

$$G_C = \Theta_{BC}^\top G_B \overline{\Theta}_{BC}$$

gezeigt. Also gilt

$$1 = \det G_C = \det \Theta_{BC}^\top \cdot \det G_B \cdot \det \overline{\Theta_{BC}} = |\det \Theta_{BC}|^2 \cdot \det G_B.$$

Das Betragsquadrat $|\det \Theta_{BC}|^2$ ist reell und positiv, da Θ_{BC} als Basiswechselmatrix regulär ist. Daraus folgt die Behauptung. □

Die Umkehrung des Lemmas ist bereits ab Dimension zwei nicht mehr richtig. (Der Leser konstruiere selbst ein Gegenbeispiel). Zur richtigen Formulierung einer Umkehrung benötigen wir die *Hauptunterdeterminanten* (auch *Hauptminoren*) einer Matrix G definiert durch

$$\Delta_k(G) = \det \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k1} & \cdots & g_{kk} \end{vmatrix}.$$

Satz 1.24 (Hurwitzsches Definitheitskriterium) *Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine symmetrische Bilinearform (falls $K = \mathbb{R}$) oder hermitsche Form (falls $K = \mathbb{C}$) auf V und G die Fundamentalmatrix bzgl. einer Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Dann ist G positiv definit (und damit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt) genau dann, wenn alle Hauptminoren Δ_k von G positiv sind.*

Beweis : Sei G positiv definit. Dann ist die Einschränkung von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $W = [b_1, \ldots, b_k]$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$ ein Skalarprodukt auf W. Insbesondere ist die Fundamentalmatrix dieser Einschränkung

$$G|_W = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k1} & \cdots & g_{kk} \end{pmatrix}$$

positiv definit. Nach dem Lemma ist $\det(G|_W) = \Delta_k > 0$. Dies beweist die erste Implikation.
Die Umkehrung beweisen wir durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist $G = (g_{11})$ mit

$g_{11} > 0$. Also ist für alle $v = (v_1) \in V \setminus \{0\}$ das Skalarprodukt $\langle v, v\rangle = (v_1)^\top G(\overline{v_1}) = |v_1|^2 \cdot g_{11} > 0$.
Wir nehmen nun an, dass für alle $(n-1)$-dimensionalen Vektorräume und für jede Basiswahl darin die Aussage richtig ist.
Wir wenden dies auf $W = [b_1, \ldots, b_{n-1}]$ an. Die Fundamentalmatrix der Einschränkung von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf W ist $G|_W = (\langle b_i, b_j\rangle)_{i,j=1,\ldots,n-1}$. Die Hauptminoren dieser Matrix sind die ersten $n-1$ Hauptminoren von G, also positiv. Also ist $\langle\cdot,\cdot\rangle|_W$ ein Skalarprodukt. Nach Gram-Schmidt gibt es eine Orthonormalbasis $C_W = \{c_1, \ldots, c_{n-1}\}$ von W und bezüglich dieser ist die Fundamentalmatrix die Einheitsmatrix.
In Analogie zu Gram-Schmidt setzen wir

$$c_n = b_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle b_n, c_j\rangle \cdot c_j.$$

Dann ist $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ eine Basis von V, denn andernfalls wäre $c_n \in W$ und dann $[b_1, \ldots, b_n] = [b_1, \ldots, b_{n-1}] = W$, im Widerspruch zur Basiseigenschaft von B. Außerdem ist $\langle c_n, c_j\rangle = \langle b_n, c_j\rangle - \langle b_n, c_j\rangle\langle c_j, c_j\rangle = 0$ für $j < n$. Also ist die Fundamentalmatrix von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bzgl. C gegeben durch

$$G_C = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & \cdots & 0 & \langle c_n, c_n\rangle \end{array}\right).$$

Ist Θ_{BC} die Basiswechselmatrix, so ist $G_C = \Theta_{BC}^\top G_B \overline{\Theta_{BC}}$, also

$$\langle c_n, c_n\rangle = \det G_C = |\det \Theta_{BC}|^2 \cdot \det G_B > 0$$

nach Voraussetzung und da Θ_{BC} regulär ist. Schreiben wir nun $0 \neq v = (v_1, \ldots, v_n)^\top$ als Koordinatenvektor in der Basis C, so ist

$$\langle v, v\rangle = |v_1|^2 + \ldots + |v_{n-1}|^2 + \langle c_n, c_n\rangle \cdot |v_n|^2 > 0.$$

□

2 Orthogonale, unitäre und normale Abbildungen

2.1 Die adjungierte Abbildung

Sei V, W zwei euklidsche oder zwei unitäre Vektorräume und $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Wir suchen nach einer Abbildung $f^*\colon W \longrightarrow V$, die (grob gesagt) den Effekt von f auf das Skalarprodukt kompensiert. Genauer:

Definition 2.1 *Die Abbildung $f^*\colon W \longrightarrow V$ heißt zu f* adjungierte Abbildung *(oder kurz:* Adjungierte*), falls für alle $v \in V$ und alle $w \in W$ gilt:*

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle.$$

Der Spezialfall $W = V$ wird natürlich im Folgenden eine wichtige Rolle spielen. Der Leser möge sich die Definition des Begriffs stets am allgemeinen Fall klarmachen, denn auf der linken Seite der Gleichung steht das Skalarprodukt in W, rechts das in V. Dementsprechend können auch nur Elemente von W bzw. von V in das Skalarprodukt eingesetzt werden. Mit dieser Plausibilitätsprüfung kann man überprüfen, ob man sich in der Definition des Begriffes nicht irrt.

Satz 2.2 *Zu einer linearen Abbildung f gibt es höchstens eine Adjungierte. Ist der („Ausgangs")vektorraum V endlich dimensional, so gibt es stets eine Adjungierte.*
Sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ und $C = \{c_1, \ldots, c_p\}$ Orthonormalbasen von V bzw. von W und A die Abbildungs-Matrix von f bzgl. B und C, so ist $A^\top$ (bzw. A^* im unitären Fall) die Abbildungsmatrix von f^* bzgl. C und B.

Beweis : Sind f_1^* und f_2^* zwei Adjungierte zu f, so gibt für alle $v \in V$ und alle $w \in W$

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f_1^*(w)\rangle = \langle v, f_2^*(w)\rangle,$$

also $\langle v, f_1^*(w) - f_2^*(w)\rangle = 0$. Daraus folgt $f_1^*(w) - f_2^*(w) = 0$ für alle $w \in W$, also $f_1^* = f_2^*$.
Für die zweite Aussage sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis von V. Wir definieren

$$f^*(w) = \sum_{j=1}^{n} \langle w, f(b_j)\rangle \cdot b_j.$$

Offenbar ist f^* linear und es gilt für $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$

$$\langle f(v), w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \langle f(b_i), w\rangle.$$

$$\begin{aligned}
\langle v, f^*(w)\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i, \sum_{j=1} \langle w, f(b_j)\rangle \cdot b_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{\langle w, f(b_j)\rangle} \cdot \langle b_i, b_j\rangle \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \overline{\langle w, f(b_i)\rangle} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle f(b_i), w\rangle \\
&= \langle f(v), w\rangle.
\end{aligned}$$

Für die letzte Aussage des Satzes schreiben wir

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p1} & \cdots & \alpha_{pn} \end{pmatrix}$$

und daher $f(b_i) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ki} \cdot c_k$. Die Definition der Adjungierten oben ergibt

$$\begin{aligned}
f^*(c_j) &= \sum_{i=1}^{n} \langle c_j, f(b_i)\rangle b_i = \sum_{i=1}^{n} \langle c_j, \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ki} \cdot c_k\rangle \cdot b_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_{ji}} \cdot b_i
\end{aligned}$$

In Matrixschreibweise übertragen, ist das genau die Behauptung. □

Für die Adjungierten gelten folgende Rechenregeln (Übung):

$$(f+g)^* = f^* + g^*, \quad (\lambda f)^* = \overline{\lambda} f^*, \quad (f \circ g)^* = g^* \circ f^* \quad \text{und} \quad f^{**} = f.$$

2.2 Normale Endomorphismen, Isometrien

Wir schränken uns von nun an auf den Fall $\dim V < \infty$ ein und untersuchen verschiedene, sukzessive restriktivere Bedingungen auf f und seine Adjungierte f^*. In all diesen Fällen wollen wir eine Basis von V suchen, sodass die Abbildungsmatrix von f (und von f^*) eine besonders einfache Gestalt hat.

Definition 2.3 • *Ein Endomorphismus $f\colon V \longrightarrow V$ heißt* normal, *falls $f \circ f^* = f^* \circ f$ gilt.*

- *Eine lineare Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ heißt* Isometrie, *falls für alle $v \in V$ gilt:*

$$\|f(v)\| = \|v\|.$$

Offenbar sind Isometrien injektiv, denn aus $f(v) = f(w)$ folgt $0 = \|f(v) - f(w)\| = \|f(v - w)\| = \|v - w\|$ und aufgrund der Definitheit folgt $v = w$.

Proposition 2.4 *Eine lineare Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ ist genau dann eine Isometrie, wenn für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt*

$$\langle f(v_1), f(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle.$$

Beweis : Für eine Richtung genügt es $v_1 = v_2$ zu setzen. Sei im Fall von euklidischen Vektorräumen umgekehrt f eine Isometrie. Dann ist

$$\begin{aligned}\langle f(v_1 + v_2), f(v_1 + v_2)\rangle = \langle v_1 + v_2, v_1 + v_2\rangle &= \langle v_1, v_1\rangle + 2\langle v_1, v_2\rangle + \langle v_2, v_2\rangle \\ &= \langle f(v_1), f(v_1)\rangle + 2\langle f(v_1), f(v_2)\rangle + \langle f(v_2), f(v_2)\rangle.\end{aligned}$$

Da $\langle f(v_i), f(v_i)\rangle = \langle v_i, v_i\rangle$ für $i = 1, 2$ verbleiben die mittleren Terme in beiden Zeilen und das ist die Behauptung. □

Im unitären Fall betrachte man zudem

$$\langle f(v_1 + iv_2), f(v_1 + iv_2)\rangle \quad \text{(Übung)}.$$

Unmittelbare Folge hieraus ist, dass eine Isometrie Winkel invariant lässt.

Satz 2.5 *Ist $V = W$, so ist f eine Isometrie genau dann, wenn $f^* \circ f = id_v$ gilt. Insbesondere ist f normal und $f^* = f^{-1}$.*

Beweis : Ist f Isometrie, so folgt aus dem vorigen Satz für alle $v, w \in V$:

$$\langle v, (f^* \circ f)(w)\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle,$$

also $\langle v, (f^* \circ f)(w) - w\rangle = 0$ für alle v, w und damit $f^* \circ f = id_v$. Gilt umgekehrt $f^* \circ f = id_v$, so ist

$$\langle v, w\rangle = \langle v, (f^* \circ f)(w)\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle$$

und damit f eine Isometrie. Die weiteren Behauptungen folgen aus der Injektivität von f und $f^{**} = f$. □

Wir leiten ab sofort die Matrixdarstellungen von f für das allgemeinere Konzept von normalen Endomorphismen her.

Proposition 2.6 *Ist f normal, so gilt für alle $v \in V$:*

$$\|f(v)\| = \|f^*(v)\|.$$

Hat f den Eigenwert λ zum Eigenvektor v, so hat f^* den Eigenwert $\overline{\lambda}$ zum Eigenvektor v.

Im euklidischen Fall kann auf die komplexe Konjugation verzichtet werden.

Beweis : Es gilt für alle $v \in V$:

$$\begin{aligned}\|f(v)\|^2 &= \langle f(v), f(v)\rangle = \langle v, (f^* \circ f)(v)\rangle = \langle v, (f \circ f^*)(v)\rangle \\ &= \langle f^*(v), f^*(v)\rangle = \|f^*(v)\|^2.\end{aligned}$$

Ist f normal, so ist auch $(f - \lambda id)$ normal, denn

$$\begin{aligned}&(f - \lambda id) \circ (f - \lambda id)^* = (f - \lambda id) \circ (f^* - \overline{\lambda} id) \\ &= f \circ f^* - \lambda f^* - \overline{\lambda} f + \lambda\overline{\lambda} id = f^* \circ f - \overline{\lambda} f - \lambda f^* + \overline{\lambda}\lambda id \\ &= (f^* - \overline{\lambda} id) \circ (f - \lambda id) = (f - \lambda id)^* \circ (f - \lambda id).\end{aligned}$$

Nach Teil a) gilt $\|(f - \lambda id)(v)\| = \|(f^* - \overline{\lambda} id)(v)\|$ und daraus folgt die Behauptung.

□

2.3 Normalformen im unitären Fall

Beim Beweis von Normalformen behandeln wir den euklidischen und unitären Fall getrennt. Wir führen im nächsten Abschnitt den euklidischen auf den unitären Fall zurück. Sei nun also V endlichdimensional und unitär.

Satz 2.7 *Ein Endomorphismus $f\colon V \longrightarrow V$ ist normal genau dann, wenn es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren gibt.*

Beweis : Sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren, d.h. $f(b_i) = \lambda_i b_i$. Dann gilt nach der vorangegangenen Proposition $f^*(b_i) = \overline{\lambda_i} b_i$. Die Abbildungsmatrizen A und A^* von f und f^* in der Basis B sind also

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} = A^* \cdot A.$$

Also ist f normal.
Die Umkehrung beweisen wir durch Induktion nach $n = \dim V$. Für $n = 1$ ist jede Basis eine Orthogonalbasis (da nur einelementig) und kann normiert werden. Sie besteht immer aus einem Eigenvektor von f. Die Behauptung gelte nun für alle $(n-1)$-dimensionalen Vektorräume. Da wir über $\mathbb{C}$ arbeiten, hat f einen Eigenwert λ_1 mit Eigenvektor v_1, ohne Einschränkung normiert. Wir schreiben $V = [v_1] \oplus [v_1]^\perp$. Um die Induktionshypothese anzuwenden, zeigen wir, dass f den Untervektorraum $W = [v_1]^\perp$ auf sich abbildet und dass die Einschränkung wieder normal ist. Es ist für $w \in W$:

$$\langle f(w), v_1 \rangle = \langle w, f^*(v_1) \rangle = \overline{\lambda} \langle w, v_1 \rangle = 0,$$

also $f(W) \subseteq W$ und mit gleicher Rechnung folgt $f^*(W) \subseteq W$. Für $w_1, w_2 \in W$ gilt

$$\langle f|_W(w_1), w_2 \rangle = \langle f(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, f^*(w_2) \rangle = \langle w_1, f^*|_W(w_2) \rangle.$$

Also ist die Einschränkung $f^*|_W$ die Adjungierte zur Einschränkung $f|_W$. Aus $f \circ f^* = f^* \circ f$ folgt $f|_W \circ f^*|_W = f^*|_W \circ f|_W$ und daher, dass $f|_W$ wieder ein normaler Endomorphismus ist. Sei also $B_W = \{b_2, \ldots, b_n\}$ die Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von W, die die Induktionshypothese liefert. Dann ist

$$B = \{v_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

die gewünschte Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. □

Die *Normalform* eines normalen Endomorphismus f eines unitären Vektorraumes ist also eine Diagonalmatrix aus den Eigenwerten von f. Die zugrundeliegende Basis von V kann als Orthonormalbasis gewählt werden. Die Normalform ist, bis auf Vertauschung der Diagonalelemente, eindeutig.
Wir spezialisieren nun auf Isometrien.

Satz 2.8 *Ein normaler Endomorphismus f eines unitären Vektorraumes ist genau dann eine Isometrie, wenn für alle Eigenwerte λ von f die Zusatzbedingung $|\lambda| = 1$ gilt.*

Beweis : Ist f eine Isometrie, so ist f normal und daher jeder Eigenvektor v zum Eigenwert λ auch ein Eigenvektor von f^* zum Eigenwert $\overline{\lambda}$. Daher ist

$$v = (f^* \circ f)(v) = f^*(\lambda v) = \overline{\lambda}\lambda v$$

und daher $|\lambda| = 1$. Umgekehrt schreiben wir den normalen Endomorphismus in Normalform. Dann ist seine Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

und die von f^* ist A^*. Ist $|\lambda_i| = 1$ für alle i, so ist $A \cdot A^* = 1$, also $f \circ f^* = f^* \circ f = id$ und f eine Isometrie. $\square$

Wir beenden diesen Abschnitt mit den entsprechenden Begriffen für Matrizen.

Definition 2.9 *Eine $(n \times n)$-Matrix A heißt* normal, *falls $A \cdot A^* = A^* \cdot A$ gilt. Sie heißt* unitär, *falls $A \cdot A^* = I_n$ gilt. Ist A reell, so heißt A orthogonal, falls $A \cdot A^\top = I_n$ gilt.*

Satz 2.10 *Ein Endomorphismus ϕ eines euklidischen (bzw. unitären) Vektorraumes ist normal genau dann, wenn die Abbildungsmatrix A von ϕ bzgl. einer Orthonormalbasis normal ist. ϕ ist eine Isometrie genau dann, wenn A orthogonal (bzw. unitär) ist.*

Im unitären Fall ist dies eine Umformulierung des vorherigen Satzes. Der euklidische Fall folgt ebenso aus der Normalform, die wir nun herleiten.

2.4 Erweiterung von euklidischen Vektorräumen zu unitären!

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum der Dimension n. Ziel des Abschnittes ist es, einen unitären Vektorraum Z zu bauen, der (als $\mathbb{C}$-Vektorraum) ebenfalls die Dimension n hat und V als $\mathbb{R}$-Untervektorraum enthält. Dabei erinnern wir an die Einbettung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$, gegeben durch $\mathbb{R} \ni v \longmapsto v + 0 \cdot i \in \mathbb{C}$. Komplexe Zahlen können wir als $\alpha + \beta i$ schreiben (und $i^2 = -1$ beachten) oder als Tupel (α, β) und die Multiplikation

$$(\alpha, \beta) \cdot (v, w) = (\alpha v - \beta w, \alpha w + \beta v)$$

entsprechend definieren. Wir verwenden hier beide Schreibweisen auch für den Vektorraum Z.

Sei $Z = V \times V = \{(v_1, v_2) \mid v_1, v_2 \in V\}$. Wir definieren die Addition

$$(v_1, v_2) + (w_1, w_2) := (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

und Skalarmultiplikation für $(\alpha, \beta) = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$:

$$(\alpha, \beta)(v_1, v_2) = (\alpha v_1 - \beta v_2, \alpha v_2 + \beta v_1).$$

Dann ist Z ein $\mathbb{C}$-Vektorraum (und damit natürlich auch $\mathbb{R}$-Vektorraum) und

$$\iota \colon V \longrightarrow Z, \quad v \longmapsto (v, 0)$$

ist eine injektive lineare Abbildung von $\mathbb{R}$-Vektorräumen. Man beachte, dass gegeben eine Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von V die Menge $\{(b_1, 0), \ldots, (b_n, 0)\}$ eine Basis (als $\mathbb{C}$-Vektorraum) von Z ist, also $\dim_{\mathbb{C}-VR} Z = \dim_{\mathbb{R}-VR} V = n$. Als $\mathbb{R}$-Vektorraum ist z.B. $\{(b_1, 0), (0, b_1), \ldots (b_n, 0), (0, b_n)\}$ eine Basis (Übung!) und folglich ist $\dim_{\mathbb{R}-VR} V = 2 \cdot n$.

Oft ist die Schreibweise $(v_1, v_2) =: v_1 + iv_2$ für Elemente von Z schöner. Wir schreiben auch $i \cdot v$ für den Unterraum der Paare, deren erste Koordinate Null ist. Man verwechsle $i \cdot V$ und $\iota(V)$ nicht. Genauer gesagt, fassen wir V via ι als Teilraum von Z auf. Dann ist $Z = V \oplus iV$. Die Skalarmultiplikation mit $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ liest sich dann als

$$(\alpha + i\beta)(v_1 + iv_2) = (\alpha v_1 - \beta v_2) + i \cdot (\beta v_1 + \alpha v_2).$$

Satz 2.11 *Es gibt genau eine hermitsche Form H auf Z, sodass die Einschränkung von H auf $\iota(V) \subseteq Z$ gerade die vorgegebene Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle =: F(\cdot, \cdot)$ ist. Ist F positiv definit, so ist auch H positiv definit.*

Beweis : Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Wenn H eine solche Form ist, dann gilt

$$\begin{aligned} H(v_1 + iw_1, v_2 + iw_2) &= H(v_1, v_2) + H(w_1, w_2) + iH(w_1, v_2) - iH(v_1, w_2) \\ &= F(v_1, v_2) + F(w_1, w_2) + iF(w_1, v_2) - iF(v_1, w_2). \end{aligned}$$

Alle Terme der rechten Seite sind durch die Vorgabe von F festgelegt und H somit eindeutig.

Andererseits kann man diese Gleichung auch zur Definition von H verwenden. Dann sieht man, dass

$$H(v_2 + iw_2, v_1 + iw_1) = \overline{H(v_1 + iw_1, v_2 + iw_2)}$$

ist und dass H linear im ersten Argument ist, da F dies ist. Also ist H eine hermitsche Form. Weiter ist, falls F positiv definit ist,

$$H(v_1 + iw_1, v_1 + iw_1) = F(v_1, v_1) + F(w_1, w_1) \geqslant 0$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $v_1 = w_1 = 0$ ist. Also ist auch H positiv definit.

$\square$

Der metrische Raum (Z, H) heißt *unitäre Erweiterung* von (V, F). Als nächstes untersuchen wir, wie sich lineare Abbildungen von V auf die unitäre Erweiterung fortsetzen.

Satz 2.12 *Ist $f: V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus, so ist*

$$\widetilde{f}(v + iw) := f(v) + if(w)$$

ein Endomorphismus von Z. Diese Abbildung ist der einzige Endomorphismus von Z, dessen Einschränkung auf V gerade f ist. Die Adjungierte von $\widetilde{f}$ ist $\widetilde{(f^*)}$. Ist f normal, so ist auch $\widetilde{f}$ normal.

Beweis : Ist $z_1 = v_1 + iw_1,\ z_2 = v_2 + iw_2 \in Z$ und $\alpha + i\beta \in \mathbb{C},$ so ist

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(z_1 + z_2) &= \widetilde{f}((v_1 + v_2) + i(w_1 + w_2)) = f(v_1 + v_2) + if(w_1 + w_2) \\
&= f(v_1) + if(w_1) + f(v_2) + if(w_2) \\
&= \widetilde{f}(v_1 + iw_1) + \widetilde{f}(v_2 + iw_2)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}((\alpha + i\beta)z_1) &= \widetilde{f}\left((\alpha v_1 - \beta w_1) + i(\beta v_1 + \alpha w_1)\right) \\
&= f(\alpha v_1 - \beta w_1) + if(\beta v_1 + \alpha w_1) \\
&= (\alpha + i\beta)\left(f(v_1) + if(w_1)\right) = (\alpha + i\beta)\widetilde{f}(z_1).
\end{aligned}$$

Also ist $\widetilde{f}$ linear. Ist φ eine lineare Fortsetzung von f nach Z, so gilt

$$\varphi(v_1 + iw_1) = \varphi(v_1) + i\varphi(w_1) = f(v_1) + if(w_1),$$

was die Eindeutigkeit von $\widetilde{f}$ beweist. Zur Bestimmung der Adjungierten berechnen wir

$$\begin{aligned}
&H\big(\widetilde{f}(v_1 + iw_1), v_2 + iw_2\big) = H\big(f(v_1) + if(w_1), v_2 + iw_2\big) \\
&= H\big(f(v_1), v_2\big) + iH\big(f(w_1), v_2\big) + H\big(f(w_1), w_2\big) - iH\big(f(v_1), w_2\big) \\
&= H\big(v_1, f^*(v_2)\big) + iH\big(w_1, f^*(v_2)\big) + H\big(w_1, f^*(w_2)\big) - iH\big(v_1, f^*(w_2)\big) \\
&= H\big(v_1 + iw_1, f^*(v_2) + if^*(w_2)\big)
\end{aligned}$$

Also ist $\widetilde{(f^*)}(v_2 + iw_2) = f^*(v_2) + if^*(w_2)$ eine Adjungierte. Wegen der Eindeutigkeit der Adjungierten ist der bestimmte Artikel in der dritten Aussage des Satzes gerechtfertigt. Außerdem können wir ab sofort gefahrlos Klammern weglassen und nur $\widetilde{f}^*$ schreiben. Ist f normal, so gilt für alle $v + iw \in Z$:

$$
\begin{aligned}
&(f \circ f^*)(v + iw) = f(f^*(v) + if^*(w)) = f(f^*(v)) + if(f^*(w)) \\
&= f^*(f(v)) + if^*if(w) = f^*(f(v + iw)) \\
&= (f^* \circ f)(v + iw).
\end{aligned}
$$

□

Ziel dieser Vorarbeiten ist ein Satz über die Normalform von normalen Endomorphismen im euklidischen Fall. Noch eine Vorbemerkung dazu:

Lemma 2.13 *Sei f ein normaler Endomorphismus des euklidischen Vektorraumes V. Ist $z = v + iw \in Z$ ein auf 1 normierter Eigenvektor von $\widetilde{f}$ zum Eigenwert $\alpha + i\beta$, so ist $\overline{z} = v - iw$ ein auf 1 normierter Eigenvektor von $\widetilde{f}$ zum Eigenwert $\alpha - i\beta$. Weiter gilt $H(z, \overline{z}) = 0$.*

Der Vektor $\overline{z}$ heißt der zu z komplex konjugierte Vektor.

Beweis : Die Eigenschaft Eigenvektor für $\widetilde{f}$ zu sein, übersetzt sich in Eigenschaften von f wie folgt:

$$
\begin{aligned}
f(v) + if(w) = \widetilde{f}(v + iw) &= (\alpha + i\beta)(v + iw) \\
&= (\alpha v - \beta w) + i(\beta v + \alpha w).
\end{aligned}
$$

Da f reellwertig ist, folgt daraus $f(v) = \alpha v - \beta w$ und $f(w) = \beta v + \alpha w$. Also ist

$$
\begin{aligned}
\widetilde{f}(\overline{z}) = \widetilde{f}(v - iw) = f(v) - if(w) &= (\alpha v - \beta w) - i(\beta v + \alpha w) \\
&= (\alpha - i\beta)(v - iw) = (\alpha - i\beta) \cdot \overline{z}.
\end{aligned}
$$

Also ist $\overline{z}$ Eigenvektor von $\widetilde{f}$ zum Eigenwert $(\alpha - i\beta)$.
Offenbar ist $\langle \overline{z}, \overline{z} \rangle = \langle v, v \rangle + (-1)^2 \langle w, w \rangle = \langle z, z \rangle = 1$, was die Normiertheit zeigt. Die Eigenschaft $\langle z, \overline{z} \rangle = 0$ folgt aus der Voraussetzung, dass f (und somit $\widetilde{f}$) normal ist zusammen mit Satz 2.7. □

Satz 2.14 (Normalform für normale Endomorphismen euklidischer Vektorräume) *Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und f ein Endomorphismus von*

V. Dann ist f genau dann normal, wenn es eine Orthonormalbasis von V gibt, sodass die Abbildungsmatrix von f die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_k & & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda'_{k+1} & -\lambda''_{k+1} \\ \lambda''_{k+1} & \lambda'_{k+1} \end{matrix}} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda'_{k+r} & -\lambda''_{k+r} \\ \lambda''_{k+r} & \lambda'_{k+r} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

hat. Dabei sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die reellen Wurzeln des charakteristischen Polynoms χ_f von f und $\lambda_{k+1}, \overline{\lambda_{k+1}}, \ldots, \lambda_{k+r}, \overline{\lambda_{k+r}}$ die Paare komplex konjugierter Eigenwerte von χ_f. Weiterhin ist dabei

$$\begin{aligned} \lambda_{k+j} &= \lambda'_{k+j} + i\lambda''_{k+j} \\ \overline{\lambda_{k+j}} &= \lambda'_{k+j} - i\lambda''_{k+j} \end{aligned}$$

für alle $\quad 1 \leq j \leq r \quad$ *mit* $\quad \lambda'_{k+j} \in \mathbb{R} \quad$ *und* $\quad \lambda''_{k+j} \in \mathbb{R}_{>0}$.
Außerdem sind die Wurzeln von χ_f genau die Eigenwerte der Fortsetzung $\widetilde{f}$ von f.

Beweis : Sei f normal. Wir beweisen die Existenz einer Abbildungsmatrix A per Induktion nach $n = \dim(V)$. Für $n = 1$ ist $V = \langle v \rangle$ und v ein Eigenvektor von f, den wir zudem normiert wählen können. Alle Behauptungen sind in diesem Fall offensichtlich. Wir nehmen an, dass die Aussage für alle Vektorräume der Dimension höchstens $n-1$ gilt. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1.) f hat einen reellen Eigenwert v_1. Wie im Beweis von Satz 2.7 sieht man, dass man die Induktionsvoraussetzung auf $U = [v_1^\perp]$ anwenden kann. Sei A_U die Abbildungsmatrix der Einschränkung bzgl. der Basis $\{v_2, \ldots, v_n\}$ von U. Dann hat die Abbildungsmatrix bzgl. der Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V die Gestalt

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_U & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

und ist von der gewünschten Form.

2.) f hat keinen reellen Eigenwert.
Wir wollen die Normalform (Satz 2.7) der unitären Erweiterung $\widetilde{f}$ von f anwenden. Nach Satz 2.12 ist diese auch normal. Wir vergleichen die Minimalpolynome $\chi_{\widetilde{f}}$ und χ_f von $\widetilde{f}$ und f. Sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V. Dann ist, wie zu Beginn des Abschnittes 2.4 erklärt, B auch eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums Z. Ist $f(b_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} b_j$, so ist nach Definition der Fortsetzung auch $\widetilde{f}(b_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} b_j$. Also stimmen die Abbildungsmatrizen von $\widetilde{f}$ und f in dieser Basis überein. Folglich ist $\chi_f = \chi_{\widetilde{f}}$ und $\chi_{\widetilde{f}}$ hat keine reelle Nullstelle. Also hat $\chi_{\widetilde{f}}$ eine komplexe Nullstelle $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ und $\widetilde{f}$ einen Eigenvektor $z = v + iw$ zum Eigenwert λ. Wir können $z \in Z$ auf 1 normiert wählen. Nach dem vorangehenden Lemma hat $\widetilde{f}$ auch den Eigenvektor $\overline{z} = v - iw$ zum Eigenwert $\overline{\lambda} = \lambda' - i\lambda''$. Wir können gegebenenfalls die Rollen von v und $\overline{v}$ vertauschen und $\lambda'' > 0$ annehmen. Der Unterraum $U = [z, \overline{z}] \subseteq Z$ ist $\widetilde{f}$-invariant. Wir suchen nach Vektoren in $V \subseteq Z$ die $U \cap V$ aufspannen. Es liegen $b_1 = \sqrt{2} \cdot w = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot i}(z - \overline{z})$ und $b_2 = \sqrt{2} \cdot v = \frac{1}{\sqrt{2}}(z + \overline{z})$ in $U \cap V =: U_V$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle b_2, b_2 \rangle &= \frac{1}{2} \langle z + \overline{z}, z + \overline{z} \rangle = 1 \\
\langle b_1, b_2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}i} \langle z - \overline{z}, z + \overline{z} \rangle = \frac{1}{2i}(1 - 1) = 0 \\
\langle b_1, b_1 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}i} \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}i} \langle z - \overline{z}, z - \overline{z} \rangle = \frac{1}{2} \left(\langle z, z \rangle + \langle \overline{z}, \overline{z} \rangle \right) = 1
\end{aligned}$$

Damit ist also $\{b_1, b_2\}$ eine Orthonormalbasis von V_U. Es ist

$$\begin{aligned}
f(b_1) = \widetilde{f}(b_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}i} \left(\widetilde{f}(z) - \widetilde{f}(\overline{z}) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}i} \big((\lambda' + i\lambda'')z - (\lambda' - i\lambda'')\overline{z} \big) \\
&= \lambda' b_1 + \lambda'' b_2 \\
f(b_2) = \widetilde{f}(b_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\widetilde{f}(z) + \widetilde{f}(\overline{z}) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \big((\lambda' + i\lambda'')z + (\lambda' - i\lambda'')\overline{z} \big) \\
&= -\lambda'' b_1 + \lambda' b_2.
\end{aligned}$$

Also ist $V_U \subseteq V$ ein f-invariater Unterraum und f hat bzgl. $\{b_1, b_2\}$ auf diesem die Abbildungsmatrix

$$A_{V_U} = \begin{pmatrix} \lambda' & \lambda'' \\ -\lambda'' & \lambda' \end{pmatrix}.$$

Sobald wir gezeigt haben, dass $V_U^{\perp}$ invariant unter f ist, können wir die Induktionsannahme auf $V_U^{\perp}$ anwenden. Die Einschränkung von f auf $V_U^{\perp}$ hat die

Normalform $A_{V_U^\perp}$ bzgl. einer Basis $\{b_3, \ldots, b_n\}$ und die Abbildungsmatrix von f bzgl. $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ ist

$$\left(\begin{array}{c:c} \boxed{\begin{matrix} \lambda' & \lambda'' \\ -\lambda'' & \lambda' \end{matrix}} & 0 \\ \hdashline 0 & A_{V_U^\perp} \end{array}\right).$$

Es genügt die Reihenfolge der Basiselemente zu vertauschen, um die Eigenwerte und (2×2)-Blöcke in die richtige Reihenfolge zu bekommen.
Damit ist die erste Implikation bewiesen. Sei umgekehrt A wie im Satz die Abbildungsmatrix von f bezüglich einer Orthonormalbasis. Dann ist $A^\top$ die Abbildungsmatrix der Adjungierten und es gilt

$$A \cdot A^\top = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda'_{k+1} & -\lambda''_{k+1} \\ \lambda''_{k+1} & \lambda'_{k+1} \end{matrix}} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda'_{k+r} & -\lambda''_{k+r} \\ \lambda''_{k+r} & \lambda'_{k+r} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda'_{k+1} & \lambda''_{k+1} \\ -\lambda''_{k+1} & \lambda'_{k+1} \end{matrix}} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda'_{k+r} & \lambda''_{k+r} \\ -\lambda''_{k+r} & \lambda'_{k+r} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix}
\lambda_1^2 & & & & & & 0 \\
& \ddots & & & & & \\
& & \lambda_k^2 & & & & \\
& & & \boxed{\begin{matrix} |\lambda_{k+1}| & 0 \\ 0 & |\lambda_{k+1}| \end{matrix}} & & & \\
& & & & \ddots & & \\
0 & & & & & \boxed{\begin{matrix} |\lambda_{k+r}| & 0 \\ 0 & |\lambda_{k+r}| \end{matrix}} &
\end{pmatrix} = A^\top \cdot A.
$$

Also ist A normal und damit f normal. □

Satz 2.15 *Zu jeder Isometrie f eines n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes V gibt es eine Orthonormalbasis, in der f die Abbildungsmatrix*

$$
A = \begin{pmatrix}
\boxed{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}} & & & & \\
& \boxed{\begin{matrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{matrix}} & & & \\
& & \boxed{\begin{matrix} \cos\omega_1 & -\sin\omega_1 \\ \sin\omega_1 & \cos\omega_1 \end{matrix}} & & \\
& & & \ddots & \\
& & & & \boxed{\begin{matrix} \cos\omega_r & -\sin\omega_r \\ \sin\omega_r & \cos\omega_r \end{matrix}}
\end{pmatrix}
$$

hat. Die Matrix A ist bis auf die Reihenfolge der Blöcke eindeutig durch f bestimmt. Hat umgekehrt ein Endomorphismus f von V eine Abbildungsmatrix der Gestalt von A bezüglich einer Orthonormalbasis, so ist f eine Isometrie. Die Matrix A heißt Normalform der Isometrie.

Beweis : Jede Isometrie ist normal und wir können daher Satz 2.14 anwenden. Die 2×2 Blöcke enthalten als Einträge λ'_{k+j} und $\pm\lambda''_{k+j}$, wobei $\lambda_{k+j} = \lambda'_{k+j} \pm i\lambda''_{k+j}$ die komplexen Eigenwerte der unitären Fortsetzung $\widetilde{f}$ von f sind. Da $\widetilde{f}$ auch eine Isometrie ist, ist $|\lambda_{k+j}| = 1$, d.h. $(\lambda'_{k+j})^2 + (\lambda''_{k+j})^2 = 1$. Wegen $\lambda''_{k+j} > 0$ gibt es genau eine reelle Zahl $\omega_j \in (0, \pi)$ mit

$$\cos(\omega_j) = \lambda'_{k+j} \quad \text{und} \quad \sin(\omega_j) = \lambda''_{k+j} \quad \text{für} \quad j = 1, \dots, r.$$

Daraus folgt, dass A die angegebene Gestalt hat. Die übrigen Aussagen folgen nun leicht. □

Beispiel 2.16 Für die Isometrie eines zweidimensionalen euklidischen Vektorraumes gibt es 4 Typen der Normalform:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B_4 = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

mit $0 < \omega < \pi$. Geometrisch beschrieben werden diese als die Identität, die Geradenspiegelung an $[e_1]$, die Punktspiegelung an Ursprung und als die Drehung um den Winkel ω.

3 Affine Räume

Affine Räume sollen ein Modell des Anschauungsraumes der „Welt, in der wir leben " sein. Wie in einem Vektorraum wollen wir zu zwei Punkten einen „Verbindungsvektor " zuordnen und diese Verbindungsvektoren erfüllen die Axiome, die in einem (reellen) Vektorraum gelten. Aber im Gegensatz zu einem Vektorraum gibt es keine natürliche Wahl eines „Ursprungs ", eines „Nullpunktes ". Dies motiviert folgende Definition. Sei K ein beliebiger Körper.

Definition 3.1 *Eine nichtleere Menge $\mathbb{A}$ heißt* affiner Raum *zum K-Vektorraum V, falls es eine Abbildung „Verbindungsvektor "*

$$\Phi\colon \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow V$$

gibt, die folgende Eigenschaften hat:

i) $\forall P \in \mathbb{A} \quad \forall v \in V \quad \exists_1 Q \in \mathbb{A}\colon \quad \Phi(P, Q) = v$

ii) $\forall P, Q, R \in \mathbb{A}\colon \quad \Phi(P, Q) + \Phi(Q, R) = \Phi(P, R).$

Ist $\dim V = n < \infty$, so schreiben wie $\mathbb{A}^n$ (oder $\mathbb{A}^n_k$, wenn wir den zugrundeliegenden Körper betonen wollen). Statt $\emptyset(P, Q)$ schreiben wie auch $\overrightarrow{PQ}$. Wir halten zwei unmittelbare Konsequenzen der Definition fest.

Proposition 3.2 *Sei $\mathbb{A}$ ein affiner Raum. Dann gilt für alle $P, Q \in A$:*

$$\overrightarrow{PQ} = 0 \Longleftrightarrow P = Q \quad \textit{und} \quad \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}.$$

Beweis : Ist $P = Q$, so folgt aus Axiom ii), dass $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ} = \overrightarrow{PQ}$, also $\overrightarrow{QQ} = 0$. Umgekehrt, falls $\overrightarrow{PQ} = 0$, so folgt aus dem soeben gezeigten $\overrightarrow{PP} = 0$ und der Eindeutigkeitsaussage in Axiom i), dass $P = Q$. Die zweite Aussage ist unmittelbare Konsequenz von Axiom ii) und $\overrightarrow{QQ} = 0$. □

Beispiel 3.3 Ist V ein Vektorraum, so ist $\mathbb{A} = V$ mit $\emptyset(v, w) = w - v$ ein affiner Raum über V. Ist $\mathbb{A} = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{R}$ und $\emptyset\big((v_1, v_2), (w_1, w_2)\big) = w_1 - v_1$, so ist $\mathbb{A}$ kein affiner Raum über V, denn die Eindeutigkeitsaussage in Axiom i) ist verletzt.

3.1 Affine Unterräume

Viele natürliche Beispiele von affinen Räumen, die nicht wie in Beispiel 3.3 einen Nullpunkt haben, entstehen indem man die Verbindungsvektoren eines Unterraumes $U \subset V$ von einem Aufpunkt aus abträgt.

Definition 3.4 *Ist $\mathbb{A}$ ein affiner Raum, $U \subseteq V$ ein Unterraum und $P \in \mathbb{A}$, so heißt*

$$\mathbb{B} = \{X \in \mathbb{A} \colon \overrightarrow{PX} \in U\}$$

ein affiner Unterraum *von $\mathbb{A}$. Die Dimension von $\mathbb{B}$ definieren wir als die Dimension von U.*

Der Punkt P ist in einem affinen Unterraum in keiner Weise besonders:

Proposition 3.5 *Ist $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ ein affiner Unterraum und $Q \in bB$, so ist $\mathbb{B} = \{X \in \mathbb{B} \colon \overrightarrow{QX} \in U\}$.*

Beweis : Aus $Q \in \mathbb{B}$ folgt $\overrightarrow{PQ} \in U$. Sei $\mathbb{D} = \{X \colon \overrightarrow{PX} \in U\}$. Ist $Y \in \mathbb{D}$, so ist $\overrightarrow{PY} \in U$, $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP} \in U$ und daher $\overrightarrow{QY} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PY} \in U$, also ist $Y \in \mathbb{B}$. Genauso zeigt man die umgekehrte Inklusion. □

Satz 3.6 *Sind $\mathbb{B}_j$ (für j in einer Indexmenge J) affine Unterräume des affinen Raumes $\mathbb{A}$ mit zugehörigen Untervektorräumen U_j und ist $\mathbb{B} = \bigcap\limits_{j \in J} \mathbb{B}_j$ nicht leer, so ist $\mathbb{B}$ ein affiner Unterraum von A mit $U = \bigcap\limits_{j \in J} U_j$ als zugehörigem Vektorraum.*

Beweis : Sei $P \in \mathbb{B}$ und $\mathbb{B}' = \{X \in \mathbb{A} : \overrightarrow{PX} \in U\}$. Dann gilt für $X \in \mathbb{B}'$, dass $\overrightarrow{PX} \in U_j$, also $X \in \mathbb{B}_j$ und daher $X \in \mathbb{B}$. Umgekehrt, ist $Y \in \mathbb{B}$, so ist $\overrightarrow{PY} \in U_j$ für alle $j \in J$, also $\overrightarrow{PY} \in U$ und daher $Y \in \mathbb{B}'$. $\square$

Definition 3.7 *Sei $M \subseteq \mathbb{A}$ nicht leer und $\mathcal{B}$ die Menge aller affinen Unterräume von $\mathbb{A}$, die M enthalten. Dann heißt $[M] := \bigcap\limits_{\mathbb{B}\in\mathcal{B}} \mathbb{B}$ die* affine Hülle *von M. Sind $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2$ zwei affine Unterräume von $\mathbb{A}$, so heißt $\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2 := [\mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2]$ der Verbindungsraum von $\mathbb{B}_1$ und $\mathbb{B}_2$.*

Beispiel 3.8 Sind P, Q zwei Punkte in $\mathbb{A}^2$, so ist $[\{P, Q\}]$ die Verbindungsgerade von P und Q.

Dieses Beispiel zeigt, dass - im Unterschied zur entsprechenden Aussage für Vektorräume - der Vektorraum zu $\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2$ nicht $U_1 + U_2$ ist, denn die Vektorräume zu $\{P\}$ und $\{Q\}$ sind jeweils der Nullraum, aber der Vektorraum zur Verbindungsgeraden ist eindimensional.

Definition 3.9 *Zwei affine Unterräume $\mathbb{B}_1$ und $\mathbb{B}_2$ von $\mathbb{A}$ mit zugehörigen Vektorräumen U_1 und U_2 heißen parallel, falls $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.*

Als Übung zeigt man leicht:

Proposition 3.10 *Sind $\mathbb{B}_1$ und $\mathbb{B}_2$ parallel, so ist $\mathbb{B} := \mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2$ leer oder $\mathbb{B}_1$ ein affiner Unterraum von $\mathbb{B}_2$ oder $\mathbb{B}_2$ ein affiner Unterraum von $\mathbb{B}_1$.*

Dabei ist es natürlich möglich, dass die beiden letztgenannten Fälle gleichzeitig auftreten, d.h., dass $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2$ ist.

Beispiel 3.11 Für zwei eindimensionale affine Unterräume $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2$ (im Folgenden *Geraden* genannt) von $\mathbb{A}^3$ tritt genau einer der folgenden Fälle auf:

i) $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2$
ii) $\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2$ haben einen Punkt gemeinsam.
iii) $\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2 = \emptyset$ und $\mathbb{B}_1$ und $\mathbb{B}_2$ sind parallel.
iv) $\mathbb{B}_1$ und $\mathbb{B}_2$ sind *windschief*, d.h. es gibt keinen affinen zweidimensionalen Unterraum von $\mathbb{A}^3$, der $\mathbb{B}_1$ und $\mathbb{B}_2$ enthält.

Diese Behauptung zeigt man, indem man alle möglichen Fälle für $\dim(\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2)$ durchgeht.

3.2 Etwas ebene affine Geometrie

Definition 3.12 *Drei Punkte $P, Q, X \in \mathbb{A}^n$ heißen* kollinear, *falls $[\{X, P, Q\}]$ eine Gerade ist. Ist zudem $X \neq Q$, so heißt die Zahl λ mit $\overrightarrow{XP} = \lambda\overrightarrow{XQ}$ das* Teilverhältnis *von X, P, Q und wird mit $\tau(X, P, Q)$ bezeichnet.*

Offenbar hängt τ von der Reihenfolge der Argumente ab, z.B. gilt $\tau(X, Q, P) = 1/\tau(X, P, Q)$. Mit diesem Begriff beweisen wir einige klassische Sätze der ebenen affinen Geometrie.

Satz 3.13 (Desargues) *Seien $g, h, k \in \mathbb{A}^2$ drei Geraden, die sich in O schneiden und $A, A' \in g$, $B, B' \in h$ und $C, C' \in k$. Ist $[\{A, B\}]$ parallel zu $[\{A', B'\}]$ und $[\{B, C\}]$ parallel zu $[\{B', C'\}]$, so ist auch $[\{A, C\}]$ parallel zu $[\{A', C'\}]$.*

Wir zeigen zunächst:

Lemma 3.14 (Strahlensatz) *In obiger Situation gilt: $[\{A', B'\}]$ ist parallel zu $[\{A, B\}]$ genau dann, wenn $\tau(O, A, A') = \tau(O, B, B')$ erfüllt ist.*

Beweis : Es gilt die Parallelität genau dann, wenn $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{A'B'}$ linear abhängig sind. Wegen

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{OB'} = \tau(O, B', B)\,\overrightarrow{OB} & \text{und} & \overrightarrow{OA'} = \tau(O, A', A)\,\overrightarrow{OA} \\ \text{sind } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} & \text{und} & \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = \tau(O, B', B)\,\overrightarrow{OB} - \tau(O, A', A)\,\overrightarrow{OA} \end{array}$$

linear abhängig genau dann, wenn $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \tau(O, B', B) & \tau(O, A', A) \end{pmatrix} = 0$ ist, also wenn $\tau(O, A', A) = \tau(O, B', B)$ gilt. □

Beweis (Desargues) : Nach Voraussetzung und dem Strahlensatz ist $\tau(O, A, A') = \tau(O, B, B')$ und $\tau(O, B, B') = \tau(O, C, C')$, daher $\tau(O, A, A') = \tau(O, C, C')$ und damit folgt wieder nach dem Strahlensatz die Behauptung. □

Satz 3.15 (Pappus) *Seien g, h Geraden, die sich in O schneiden, $P_1, P_2, P_3 \in g$ und $Q_1, Q_2, Q_3 \in h$ wie in Abbildung 3 angeordnet, insbesondere paarweise verschieden. Sind $[\{P_1, Q_2\}]$ und $[\{P_2, Q_1\}]$ parallel sowie $[\{Q_2, P_3\}]$ und $[\{P_2, Q_3\}]$ parallel, so sind auch $[\{P_1, Q_3\}]$ und $[\{Q_1, P_3\}]$ parallel.*

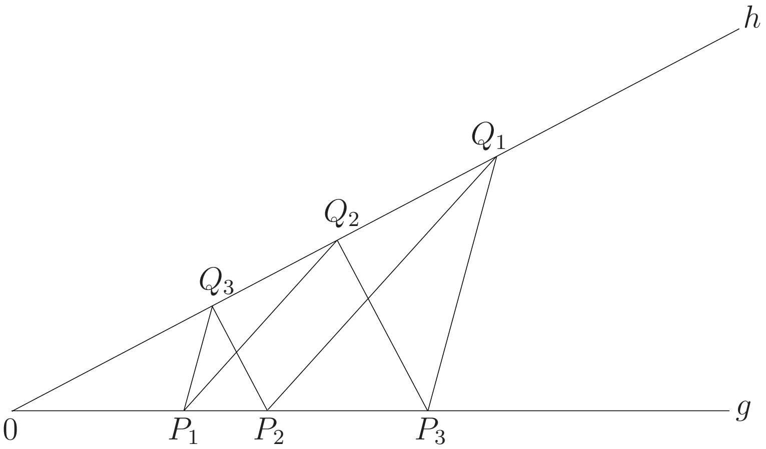

Abbildung 2: Titel der Figur

Beweis : Sei $a = \overrightarrow{OP_1}$ und $b = \overrightarrow{OQ_3}$. Diese beiden Vektoren bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Wir schreiben $p_i = \overrightarrow{OP_i}$ und $q_i = \overrightarrow{OQ_i}$. Dann ist $p_i = \lambda_i a$ und $q_i = \mu_i b$ und die λ_i und μ_i sind alle von Null verschieden. Die Voraussetzung ist nach dem Strahlensatz gleichwertig, damit dass $\mu_2 b - \lambda_1 a$ und $\mu_1 b - \lambda_2 a$ linear abhängig sind, so wie, dass $\mu_3 b - \lambda_2 a$ und $\mu_2 b - \lambda_3 a$ linear abhängig sind. Da a und b linear unabhängig sind folgt daraus, dass $\lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2$ und $\lambda_2\mu_2 - \lambda_3\mu_3$. Daraus folgt $\lambda_1\mu_2 = \lambda_3\mu_3$ und weiter, dass $\mu_3 b = \lambda_1 a$ und $\mu_1 b = \lambda_3 a$ linear abhängig sind. Wiederum aus dem Strahlensatz folgt nun die Behauptung. $\square$

Man kann affine Geometrie auch axiomatisch beginnen, indem man eine Menge von Punkten und eine Menge von Geraden hernimmt und zwei Relationen, eine Inzidenzrelation und eine Parallelitätsrelation definiert. Man fordert dann,

i) dass Parallelität eine Äquivalenzrelation ist,
ii) dass durch zwei Punkte genau eine Gerade geht
iii) dass jede Gerade mindestens zwei Punkte enthält,
iv) dass es zu jedem Punkt eine Gerade gibt, die durch den Punkt geht und zu einer vorgegebenen Gerade parallel ist und
v) dass zu einem Dreieck ABC und Punkten A', B' ein Punkt C' existiert, so dass $AB \| A'B'$, $AC \| A'C'$ und $BC \| B'C'$ ist

Wenn man affine Geometrien derart definiert, ist bis heute offen, ob der Satz von Desargues allgemein richtig ist.

3.3 Affine Abbildungen

Die folgende Definition ist so konzipiert, dass alle wesentlichen Begriffe der affinen Geometrie (Parallelität, Teilverhältnisse, ...) unter affinen Abbildungen erhalten bleiben.

Definition 3.16 *Seien $\mathbb{A}^n$ und $\mathbb{B}^p$ zwei affine Räume über dem selben Grundkörper K. Eine Abbildung $F : \mathbb{A}^n \to \mathbb{B}^p$ heißt affin, wenn für alle $P, Q, R, T \in \mathbb{A}^n$ und alle $\lambda \in K$ gilt:*

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda \cdot \overrightarrow{RT} \Rightarrow \overrightarrow{F(P)F(Q)} = \lambda\overrightarrow{F(R)F(T)}.$$

Seien V und W die zugrundeliegenden Vektorräume von $\mathbb{A}^n$ bzw. $\mathbb{B}^p$.

Beispiel 3.17 i) Als *Translation* um $v \in V$ bezeichnet man die affine Abbildung $T_v : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ mit $\overrightarrow{PT_v(P)} = v$ für alle $P \in \mathbb{A}^n$. Diese hat die Eigenschaft

$$\begin{aligned}\overrightarrow{T_v(P)T_v(Q)} &= \overrightarrow{T_v(P)P} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QF_v(Q)}\\ &= -v + \overrightarrow{PQ} + v = \overrightarrow{PQ}.\end{aligned}$$

ii) Als *Streckung* mit Zentrum Z und Streckfaktor $\lambda \in K$ bezeichnet man die Abbildung $\sigma_\lambda : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ mit $\overrightarrow{Z\sigma_\lambda(P)} = \lambda\overrightarrow{ZP}$ für alle $P \in \mathbb{A}^n$.

iii) Als *Scherung* $S_g : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ entlang der Gerade g bezeichnet man folgende affine Abbildung. Sei $[v_1] \subset V$ der zu g gehörige Unterraum und $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von V. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung $f : V \to V$.

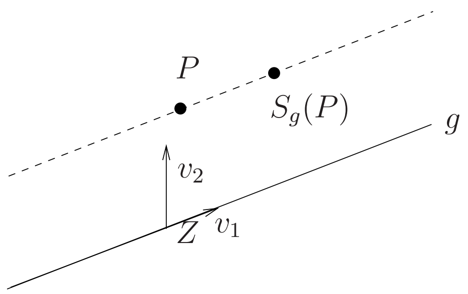

Abbildung 3: Scherung entlang einer Geraden

Dann gelte für alle $P \in \mathbb{A}^2$ und $Z \in g$:

$$\overrightarrow{ZS_g(P)} = f(\overrightarrow{ZP}).$$

Die Streckung hängt von der Basiswahl in V und $t \in K$ ab.

Satz 3.18 *Zu jeder affinen Abbildung $F : \mathbb{A}^n \to \mathbb{B}^p$ gehört genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit*

$$(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{F(P)F(Q)} \qquad \textit{für alle } P, Q \in \mathbb{A}^n. \tag{2}$$

Beweis : Zunächst bestimmt (2) eindeutig eine Abbildung $f : V \to W$. Ist $v \in V$, so wähle $P \in \mathbb{A}^n$ und dann $Q \in \mathbb{A}^n$ mit $\overrightarrow{PQ} = v$. Dann ist $f(v) = \overrightarrow{F(R)F(Q)}$ und somit f eindeutig festgelegt. Hat man statt P einen anderen "Aufpunkt" R gewählt und S mit $\overrightarrow{RS} = v$, so folgt aus der Definition einer affinen Abbildung, dass $f(v) = \overrightarrow{F(P)F(Q)} = \overrightarrow{F(R)F(S)}$. Wir weisen noch Linearität nach:
Seien $v, w \in V$ mit $\overrightarrow{PQ} = v$ und $\overrightarrow{QR} = w$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(v+w) &= f(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = f(\overrightarrow{PR}) = \overrightarrow{F(P)F(R)} \\ &= \overrightarrow{F(P)F(Q)} + \overrightarrow{F(Q)F(R)} = f(\overrightarrow{PQ}) + f(\overrightarrow{QR}) \\ &= f(v) + f(w). \end{aligned}$$

Ist $\lambda \cdot v = \overrightarrow{PR}$, so folgt
$(\lambda v) = f(\overrightarrow{PR}) = \overrightarrow{F(P)F(R)} = \lambda \overrightarrow{F(P)F(Q)} = \lambda f(\overrightarrow{PQ}) = \lambda f(v).$ $\square$

Umgekehrt ist eine affine Abbildung durch Vorgabe eines Aufpunkts, dessen Bild und einer linearen Abbildung gegeben.

Satz 3.19 *Sei $f : V \to W$ linear, $Z \in \mathbb{A}^n, Z' \in \mathbb{B}^p$ beliebig. Dann ist*

$$F : \begin{cases} \mathbb{A}^n & \to & \mathbb{B}^p \\ P & \mapsto & F(P) \end{cases} \quad \textit{mit } f(\overrightarrow{ZP}) = \overrightarrow{Z'F(P)}$$

die einzige affine Abbildung, deren zugehörige lineare Abbildung f ist und die Z auf Z' abbildet.

Beweis : Wir prüfen, dass F eine affine Abbildung definiert. Es ist

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{PQ}) &= f(\overrightarrow{ZQ} - \overrightarrow{ZP}) = f(\overrightarrow{ZQ}) - (\overrightarrow{ZP}) \\ &= \overrightarrow{Z'F(Q)} - \overrightarrow{Z'F(P)} = \overrightarrow{F(P)F(Q)}. \end{aligned}$$

Da f linear ist, folgt aus $\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{RT}$ die Gleichung $f(\overrightarrow{PQ}) = \lambda f(\overrightarrow{RT})$ und aus obiger Rechnung. $\overrightarrow{F(P)F(Q)} = \lambda \overrightarrow{F(R)F(T)}$, was zu zeigen war. Offenbar gehört zu F die lineare Abbildung f. Sind F und G zwei lineare Abbildungen mit $F(Z) = Z' = G(Z)$ und zugehöriger linearer Abbildung f, so ist

$$\overrightarrow{Z'F(X)} = f(\overrightarrow{ZX}) = \overrightarrow{Z'G(X)}$$

und nach der Eindeutigkeit in Axiom i) eines affinen Raumes folgt $F = G$. $\square$

Damit können wir die Eigenschaften auflisten, die unter einer affinen Abbildung invariant sind.

Satz 3.20 *Sei $F : \mathbb{A}^n \to \mathbb{B}^p$ affin. Dann gilt*

i) Ist $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{A}^n$ ein affiner Unterraum mit zugehörigem Vektorraum U, so ist $F(\mathbb{D})$ ein affiner Unterraum von $\mathbb{B}^p$ mit zugehörigem Unterraum $f(U)$, wobei f die lineare Abbildung zu F aus Satz 3.18 ist.

ii) Sind $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2 \subseteq \mathbb{A}^n$ parallele affine Unterräume, so sind auch $F(\mathbb{D}_1)$ und $F(\mathbb{D}_2)$ parallel.

iii) F lässt Teilverhältnisse unverändert, d.h. für drei kollineare Punkte $X, P, Q \in \mathbb{A}^n$ mit $Q \neq X$ gilt:

$$\tau(X, P, Q) = \tau\big(F(X), F(P), F(Q)\big),$$

falls $F(Q) \neq F(X)$.

Beweis : Sei $\mathbb{D} = \{X \in \mathbb{A}^n : \overrightarrow{PX} \in U\}$. Nach Satz 3.18 ist $\overrightarrow{F(P)F(X)} = f(\overrightarrow{PX})$. Also ist

$$F(\mathbb{D}) = \{F(X) \in \mathbb{B}^p : \overrightarrow{F(P)F(X)} \in f(U)\}$$

und somit ein affiner Unterraum. Das zeigt i). Die Eigenschaft ii) folgt aus i) und der Definition von Parallelität direkt. Zum Beweis von iii) sei $\tau(X, P, Q) = \lambda$, also $\overrightarrow{XP} = \lambda \overrightarrow{XQ}$. Nach Definition einer affinen Abbildung folgt direkt

$$\overrightarrow{F(X)F(P)} = \lambda \overrightarrow{F(X)F(Q)}$$

und damit die Behauptung. $\square$

Unter allen affinen Abbildungen haben wir bereits in den einführenden Beispielen zumeist affine Selbsabbildungen $F\colon \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ untersucht. Unter diesen sind die bijektiven Selbstabbildungen, genannt *Affinitäten*, besonders wichtig.

Satz 3.21 *Die Menge* $\mathrm{Aff}(\mathbb{A}^n)$ *der Affinitäten von* $\mathbb{A}^n$ *bilden eine Gruppe, die* affine Gruppe *von* $\mathbb{A}^n$.

Beweis : Das Verknüpfen affiner Abbildungen ist offenbar eine affine Abbildung, wie man an der Definition direkt abliest. Neutrales Element ist die Identitätsabbildung. Sei F bijektiv und affin. Wir rechnen nach, dass F^{-1} affin ist. Sei

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{RT}$$

und $Z \in \mathbb{A}^n$ der eindeutig bestimmte Punkt, sodass

$$\overrightarrow{F^{-1}(P)Z} = \lambda \overrightarrow{F^{-1}(R)F^{-1}(T)}.$$

Anwendung von F ergibt $\overrightarrow{PF(Z)} = \lambda \overrightarrow{RT}$ und nach der Eindeutigkeit folgt $Q = F(Z)$ oder $Z = F^{-1}(Q)$, was zu zeigen war. $\square$

Aufgrund von Satz 3.21 können wir affine Abbildungen $F\colon \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{B}^p$ in Koordinaten darstellen. Seien dazu $O \in \mathbb{A}^n,\ O' \in \mathbb{B}^p$ und $\{b_1, \ldots, b_n\}$ bzw. $\{c_1, \ldots, c_p\}$ Basen von V bzw. W. Sei A die Abbildungsmatrix der zu F gehörigen linearen Abbildung und $a = \overrightarrow{O'F(O)}$. Ist $X \in \mathbb{A}^n$ und $\overrightarrow{x} \in K^n$ der zu $\overrightarrow{OX}$ gehörige Koordinatenvektor bzgl. $\{b_1, \ldots, b_p\}$ sowie $\overrightarrow{x'} \in K^p$, der zu $\overrightarrow{O'F(X)}$ gehörige Koordinatenvektor, so gilt

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'F(X)} &= \overrightarrow{O'F(O)} + \overrightarrow{F(O)F(X)}\\ &= a + f(\overrightarrow{OX}),\end{aligned}$$

also haben wir Koordinaten

$$\overrightarrow{x'} = \overrightarrow{a} + A \cdot \overrightarrow{x}, \tag{3}$$

wobei $\overrightarrow{a}$ der Koordinatenvektor von a bzg. $\{b_1, \ldots, b_n\}$ ist. Umgekehrt prüft man mit Hilfe von Satz 3.19 leicht nach, dass jede Abbildung, die in Koordinaten durch (3) gegeben ist, eine affine Abbildung ist.

4 Euklidische affine Räume

Dieser Abschnitt ist auf das Verständnis unseres Anschauungsraumes, der „Welt, in der wir leben" ausgerichtet und beinhaltet im Vergleich zum vorigen Abschnitt zusätzlich einen Abstandsbegriff. Wir wählen daher hier den Grundkörper $K = \mathbb{R}$.

Definition 4.1 *Ein euklidischer affiner Raum* $\mathbb{E}$ *ist ein affiner Raum* $(\mathbb{E}, \phi)$*, dessen zugrundeliegender Vektorraum ein euklidischer Vektorraum* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ist.*

Ist $\dim \mathbb{E} = n$, so schreiben wir wieder $\mathbb{E}^n$. Das Skalarprodukt erlaubt die Definition einer Abstandsfunktion

$$\begin{aligned} d\colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\longmapsto \|\phi(P, Q)\| = \|\overrightarrow{PQ}\|. \end{aligned}$$

Aus den Eigenschaften der Norm folgt sofort:

Proposition 4.2 *Die Abstandsfunktion eines euklidischen affinen Raumes erfüllt für alle* $P, Q, R \in \mathbb{E}$

$$\begin{aligned} &d(P,Q) \geqslant 0 \quad \textit{und} \quad d(P,Q) = 0 \Longleftrightarrow P = Q && \textit{(Definitheit)} \\ &d(P,Q) = d(Q,P) && \textit{(Symmetrie)} \\ &d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R) && \textit{(Dreiecksungleichung)} \end{aligned}$$

Definition 4.3 *Ein Tupel* $(O, e_1, \ldots, e_n)$ *mit* $O \in \mathbb{E}^n$ *und einer Orthonormalbasis* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *von* V *heißt* kartensisches Koordinatensystem*.*

Ist $P \in \mathbb{E}^n$ ein beliebiger Punkt, so können wir

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

schreiben. Wir nennen $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ die Koordinaten des Punktes P bzgl. des kartesischen Koordinatensystems $(O, e_1, \ldots, e_n)$. Umgekehrt gibt es zu $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ genau einen Punkt $P \in \mathbb{E}^n$ mit diesen vorgegebenen Koordinaten, nämlich den Punkt P mit $\overrightarrow{OP} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Der Vorteil eines kartesischen Koordinatensystems (d.h. der Eigenschaft, dass die e_i orthonormiert sind) besteht darin, dass sich Abstände leicht ausrechnen lassen. Sind $P = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ und $Q = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, so ist

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda_i) e_i\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda_i)^2}.$$

Die naheliegendste Abstandsfolge ist die zweier affiner Unterräume $\mathbb{B}, \mathbb{B}'$ in $\mathbb{A}$. Dabei wollen wir als *Abstand* das Infimum der Abstände von Punkten in $\mathbb{B}$ bzw. $\mathbb{B}'$ definieren, in Zeichen

$$d(\mathbb{B}, \mathbb{B}') = \inf\{d(X, X') \ :\ x \in \mathbb{B}, x' \in \mathbb{B}'\}.$$

Wir zeigen, dass das Infimum angenommen wird und wie man es berechnet. Dazu verwenden wir die Orthogonalprojektion π aus Abschnitt 1.6.

Satz 4.4 *Sind $\mathbb{B}, \mathbb{B}'$ affine Unterräume von $\mathbb{E}^n$ gegeben durch*

$$\mathbb{B} = \{X \in \mathbb{E}^n \; : \; \overrightarrow{PX} \in W\} \quad \textit{und} \quad \mathbb{B}' = \{X' \in \mathbb{E}^n \; : \; \overrightarrow{P'X'} \in W'\},$$

so gilt

$$d(\mathbb{B}, \mathbb{B}') = \|\overrightarrow{PP'} - \pi(\overrightarrow{PP'})\|,$$

wobei π die orthogonale Projektion auf den Unterraum $W + W'$ ist.

Beweis : Wir schreiben die orthogonale Projektion π als

$$\pi\colon \begin{cases} V &= & (W+W') & \oplus & (W+W')^\perp & \longrightarrow & V \\ v &= & y & + & z & \longrightarrow & y = w + w', \end{cases}$$

mit $w \in W$ und $w' \in W'$, wobei diese Zerlegung im Gegensatz zur Zerlegung $v = y+z$ nicht eindeutig ist. Insbesondere können wir $\pi(\overrightarrow{PP'}) = w_0 + w_0'$ schreiben, wobei $w_0 \in W, w_0' \in W'$ ist. Daher gibt es Punkte $L \in \mathbb{B}$ und $L' \in \mathbb{B}'$ („Lotfußpunkte“) mit $\overrightarrow{PL} = w_0$ und $\overrightarrow{P'L'} = w_0'$. Außerdem gilt $\overrightarrow{PP'} - \pi(\overrightarrow{PP'}) = \overrightarrow{LL'} \in (W + W')^\perp$. Mit diesen Bezeichnungen müssen wir also zeigen, dass

$$d(\mathbb{B}, \mathbb{B}') = \|\overrightarrow{LL'}\|$$

gilt. Das Infimum ist sicher durch $\|\overrightarrow{LL'}\|$ beschränkt, also $d(\mathbb{B}, \mathbb{B}') \leq \|\overrightarrow{LL'}\|$. Andererseits gilt für alle $X \in \mathbb{B}$ und $X' \in \mathbb{B}'$:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{XX'}\|^2 &= \| \underbrace{\overrightarrow{LL'}}_{\in (w+w')^\perp} + \underbrace{\left(\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{P'X'} + \pi(\overrightarrow{PP'})\right)}_{\in (w+w')} \|^2 \\ &= \|\overrightarrow{LL'}\|^2 + \|\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{P'X'} + \pi(\overrightarrow{PP'})\|^2 \geqslant \|LL'\|^2. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt diese Ungleichung auch für das Infimum und daraus folgt die Behauptung. $\square$

Aus diesem Beweis ergibt sich ein Algorithmus zur Bestimmung von $d(\mathbb{B}, \mathbb{B}')$. Gesucht ist ein Punktepaar $L \in \mathbb{B}$ und $L' \in \mathbb{B}'$, sodass $\overrightarrow{LL'} \perp W$ und $\overrightarrow{LL'} \perp W'$. Denn für so ein Punktepaar ist $\mathbb{B} = \{X \in \mathbb{E}^n \; : \; \overrightarrow{LX} \in W\}$ und $\mathbb{B}' = \{X' \in \mathbb{E}^n \; : \; \overrightarrow{L'X'} \in W'\}$ und $d(\mathbb{B}, \mathbb{B}') = \|\overrightarrow{LL'} - \pi(\overrightarrow{LL'})\| = \|\overrightarrow{LL'}\|$. Um so ein Punktepaar zu finden, wählt man eine Basis $\{b_1, \dots, b_r\}$ von W und eine Basis $\{b'_1, \dots, b'_s\}$ von W'. Man macht den Ansatz

$$\overrightarrow{OL} = \ell = p + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i b_i, \quad \overrightarrow{OL'} = \ell' = p' + \sum_{k=1}^{s} \mu_k b'_k,$$

wobei $p = \overrightarrow{OP}$ und $p' = \overrightarrow{OP'}$. Die Unbekannten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ und $\mu_1, \dots, \mu_s$ bestimmt man aus dem Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} \langle \ell - \ell', b_i \rangle &= 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, r \\ \langle \ell - \ell', b'_k \rangle &= 0 \quad \text{für} \quad k = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Dieses homogene Gleichungssystem hat $r + s$ Gleichungen für $r + s$ Unbestimmte. Es hat also stets eine Lösung, welche im Allgemeinen nicht eindeutig ist.

4.1 Bewegungen

Definition 4.5 *Eine affine Selbstabbildung des $\mathbb{E}^n$, deren zugehörige lineare Abbildung eine Isometrie ist, heißt* Bewegung.

Ist F eine Bewegung, so läßt F Abstände unverändert, denn $d\big(F(X), F(Y)\big) = \|\overrightarrow{F(X)F(Y)}\| = \|f(\overrightarrow{XY})\| = \|\overrightarrow{XY}\| = d(X, Y)$. Überraschend ist, dass auch die Umkehrung dieser Aussage gilt.

Satz 4.6 *Ist $F : \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^n$ eine Selbstabbildung, die alle Abstände invariant läßt, ist eine Bewegung.*

Wir bemerken, dass a priori noch nicht einmal vorausgesetzt ist, dass F affin ist. Zum Beweis verwenden wir folgendes Lemma.

Lemma 4.7 *Vier Punkte $A, B, C, D \in \mathbb{E}^n$ sind genau dann (in dieser Reihenfolge) Ecken eines Parallelogramms (d.h. es gilt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$), wenn gilt:*

$$d^2(A, B) + d^2(B, C) + d^2(C, D) + d^2(D, A) = d^2(A, C) + d^2(B, D). \tag{4}$$

Sei V der Vektorraum, der $\mathbb{E}^n$ zugrundeliegt.

Beweis des Satzes : Wir definieren eine Abbildung

$$f : V \longrightarrow V \quad \text{durch} \quad f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{F(A)F(B)}$$

und zeigen sukzessive, dass f wohldefiniert, linear und schließlich eine Isometrie ist. Ist $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, so gilt nach dem Lemma und der Voraussetzung über F, dass

$$\begin{aligned} d^2\big(F(A), F(B)\big) + d^2\big(F(B), F(C)\big) + d^2\big(F(C), F(D)\big) + d^2\big(F(D), F(A)\big) \\ = d^2\big(F(A), F(C)\big) + d^2\big(F(B), F(D)\big). \end{aligned}$$

Die umgekehrte Implikation des Lemmas besagt, dass $\overrightarrow{F(A)F(B)} = \overrightarrow{F(D)F(C)}$ und damit, dass f wohldefiniert ist. Weiter ist

$$\|f(x)\| = \|f(\overrightarrow{AB})\| = \|\overrightarrow{F(A)F(B)}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = \|x\|,$$

wobei wir A und B in $\mathbb{E}^n$ mit $\|x\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ gewählt haben.
Sind $x, y \in V$ gegeben, so wählen wir $A, B \in \mathbb{E}^n$ mit $\overrightarrow{AB} = x$ und sodann $C \in \mathbb{E}^n$, sodass $\overrightarrow{BC} = y$. Also ist

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = f(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{F(A)F(C)} \\ &= \overrightarrow{F(A)F(B)} + \overrightarrow{F(B)F(C)} = f(\overrightarrow{AB}) + f(\overrightarrow{BC}) = f(x) + f(y) \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Beobachtungen folgt

$$\begin{array}{ccc} \|x+y\|^2 & = & \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ \| & & \\ \|f(x+y)\|^2 & = & \|f(x)\|^2 + 2\langle f(x), f(y)\rangle + \|f(y)\|^2 \\ & = & \|(x)\|^2 + 2\langle f(x), f(y)\rangle + \|(y)\|^2, \end{array}$$

also

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle. \tag{5}$$

Aus der Additivität folgt für $k \in \mathbb{Z}$, das $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$ ist. Angewandt auf $y = \frac{1}{k}x$ folgt $f(y) = k \cdot f(\frac{1}{k}x)$, also $f(qx) = q \cdot f(x)$ für alle $q \in Q$ und alle $x \in V$. Da F Abstände bewahrt, ist F und somit auch f stetig. Also gilt $f(rx) = rf(x)$ für alle $r \in \mathbb{R}$ und f ist linear. Aus (5) folgt, dass f in der Tat eine Isometrie ist. □

Beweis des Lemmas : Es sei $a = \overrightarrow{AB}, b = \overrightarrow{BC}, c = \overrightarrow{CD}$ und $d = \overrightarrow{DA}$. Ferner sei $e = \overrightarrow{AC}$ und $f = \overrightarrow{BD}$. Der Verbindungsvektor x der Mittelpunkte der Diagonalen ist also

$$x = a + \frac{f}{2} - \frac{e}{2} = a - \frac{a+d}{2} - \frac{a+b}{2} = -\frac{b+d}{2} = \frac{a+c}{2}.$$

Außerdem gilt natürlich $a + b + c + d = 0$. Es ist zu zeigen, dass die Gleichung (4) genau dann gilt, wenn $x = 0$. Dazu berechnen wir:

$$\begin{aligned}
&\|a\|^2 + \|b\|^2 + \|c\|^2 + \|d\|^2 - \|e\|^2 - \|f\|^2 = \langle a, a\rangle + \langle b, b\rangle + \langle c, c\rangle + \langle d, d\rangle \\
&-\langle a + b, a + b\rangle - \langle a + d, a + d\rangle \\
&= \langle c, c\rangle - \langle a, a\rangle - 2\langle a, b\rangle - 2\langle a, d\rangle = \langle c, c\rangle + \langle a, a\rangle + 2\langle a, c\rangle \\
&= \langle a + c, a + c\rangle = 4\|x\|^2.
\end{aligned}$$

□

5 Beispiele, Anwendungen,Vermischtes

Beispiel 5.1 Derzeit findet die Frauenfußballweltmeisterschaft statt. Zu Beginn des Eröffnungsspiels Deutschland - Kanada und zu Beginn der 2. Halbzeit liegt der Ball auf dem Anstoßpunkt des Berliner Stadions. Zeigen Sie, dass zu diesen zwei Zeitpunkten mindestens 2 Punkte an der Oberfläche des Balles auf dem gleichen Punkt liegen.

Die Bewegungen des Balles während der ersten Halbzeit sind eine affine Abbildung F, dessen zugehörige lineare Abbildung eine Isometrie ist. Außerdem wird der Mittelpunkt M un die Orientierung des Balles unter F festgelassen. Ist $\{b_1, b_2, b_3\}$ eine ONB des $\mathbb{R}^3$, so wird F bzgl. dem kartesischen Koordinatensystem $(M, \{b_1, b_2, b_3\})$ beschrieben als

$$F\colon x \longmapsto x' = A \cdot x,$$

wobei A die Abbildungsmatrix einer Isometrie mit $\det(A) = +1$ ist. Wir können die Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$ so wählen, dass A in Normalform ist. Da $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ ungerade ist, hat diese Normalform möglicherweise ein Drehkästchen, sicher aber die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \end{pmatrix}.$$

Ist r der Radius des Balles, so werden also die Punkte $\begin{pmatrix} \pm r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf der Oberfläche von F fixiert.

Wir nehmen das Beispiel als Anlaß und wollen die Bewegungen des $\mathbb{R}^n$ klassifizieren. Im Beispiel war es sehr angenehm, dass F einen Fixpunkt hat.

Lemma 5.2 *Wenn F keinen Fixpunkt hat, so hat die zugehörige Isometrie den Eigenwert $+1$.*

Beweis : Sei $F(x) = A \cdot x + a$ die Darstellung von F in einem Koordinatensystem. Falls A nicht den Eigenwert $+1$ hat, so ist $(A - E)$ regulär, also hat $(A - E) \cdot x = -a$ eine Lösung $x \neq 0$. Diese ist ein Fixpunkt von F. $\square$

Bewegungen mit Fixpunkt: Hat F einen Fixpunkt, so wählen wir diesen als Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems. Wir wählen die ONB wiederum so, dass die Isometrie in Normalform ist, also

$$x' = A \cdot x \quad \text{mit}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} +1 & & \\ & \ddots & \\ & & +1 \end{matrix}} & & & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}} & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \cos w_1 & -\sin w_1 \\ \sin w_1 & \cos w_1 \end{matrix}} & & & \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & & \boxed{\begin{matrix} \cos w_r & -\sin w_r \\ \sin w_r & \cos w_r \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Bewegungen ohne Fixpunkt: Wir wählen zunächst einen beliebigen Ursprung O, aber zumindest eine ONB von $\mathbb{R}^n$, sodass die Isometrie Normalform hat. Seien $\{b_1, \ldots, b_k\}$ für $k \leqslant n$ die Eigenvektoren zum Eigenwert $+1$ und

$$F \colon x \longmapsto x' = A \cdot x + a.$$

Wir wollen a durch $\widetilde{a}$ ersetzen, das zwar nicht Null, aber zumindest relativ einfach ist. Ist O' ein anderer Ursprung und $F(x) = Ax + \widetilde{a}$ die Darstellung von F bzgl. dem kartesischen Koordinatensystem $(O', b_1, \ldots, b_n)$, so gilt mit $c = \overrightarrow{O'O}$

$$\widetilde{a} = \overrightarrow{O'F(O')} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OF(O)} + \overrightarrow{F(O)F(O')} = c + a - A \cdot c,$$

also $\widetilde{a} = a - (A - E) \cdot c$. Sei $U = [b_1, \ldots, b_k]$. Dann gilt $\pi_U(\widetilde{a}) = \pi_U(a)$ und die Einschränkung der linearen Abbildung $f(x) = A \cdot x$ auf $U^\perp$ hat keinen Eigenwert $+1$. Also ist $(f - id)_{U^\perp}$ invertierbar und wir können c so wählen, dass $\pi_{U^\perp}(a) = (f - id)|_{U^\perp}(c)$ ist, also $\pi_{U^\perp}(\widetilde{a}) = 0$. In Koordinaten haben wir dann $F(x) = A \cdot x + \widetilde{a}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} +1 & & \\ & \ddots & \\ & & +1 \end{matrix}} & & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}} & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \cos w_1 & -\sin w_1 \\ \sin w_1 & \cos w_1 \end{matrix}} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \boxed{\begin{matrix} \cos w_r & -\sin w_r \\ \sin w_r & \cos w_r \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad \widetilde{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 5.3 Wir spezialisieren auf Dimension zwei. Die Bewegungen mit Fixpunkt wurden nach obigen Überlegungen im Kapitel über Isometrienormalformen klassifiziert. Es sind dies Identität, Geradenspiegelung, Punktspiegelung und Drehung um einen Fixpunkt.

Es gibt zwei Normalformen mit Eigenwert $+1$, nämlich $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Zu A_1 gehören Translationen, wobei a beliebig ist. Im Fall von A_2 können wir die erste Komponente von a gleich Null erreichen. Wir erhalten damit *Schubspiegelungen*, wobei die Verschiebung in Richtung der Fixachse stattfindet.

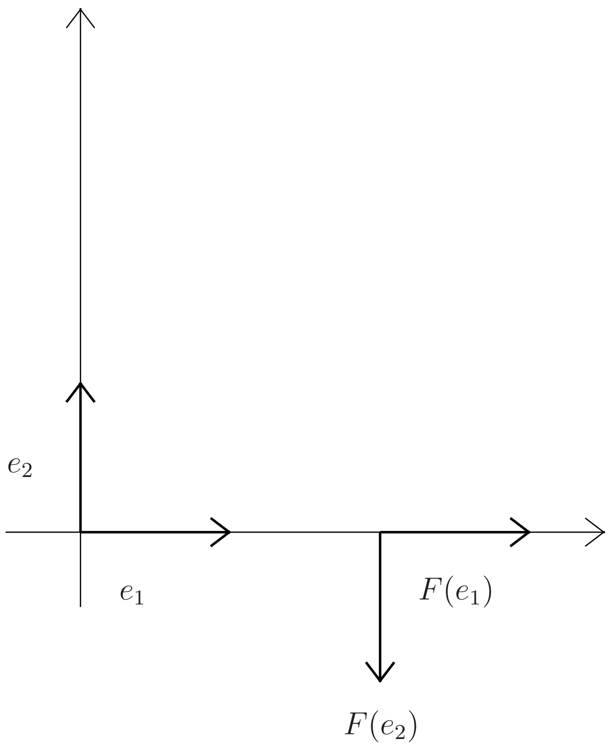

Abbildung 4: Schubspiegelung