Übungen - Blatt 5

(Abgabe der Lösungen am Dienstag, den 14.06.2011, um 10.15 Uhr)

Aufgabe 1) ***(4 Punkte)*** *Sei $\mathbb{A}$ ein affiner Raum zum K-Vektorraum V und sei $\emptyset \neq \mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ eine Teilmenge. Zeigen Sie: Falls gilt: "Für alle $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{B}$ folgt $[\{P_0, P_1, P_2\}] \subset \mathbb{B}$", so ist $\mathbb{B}$ ein affiner Unterraum von $\mathbb{A}$.*

Aufgabe 2) ***a) (2 Punkte)*** *Zeigen Sie: Die Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems ist ein affiner Raum oder die leere Menge.*

b) (2 Punkte) *Bestimmen Sie zu*

$$\mathbb{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} : \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

ein inhomogenes lineares Gleichungssystem dessen Lösungsmenge gerade $\mathbb{B}$ ist.

Aufgabe 3) ***(4 Punkte)*** *Sei $\mathbb{A}^n$ ein affiner Raum zum K-Vektorraum V und seien $\mathbb{B}_1 = \left\{ X \in \mathbb{A}^n : \overrightarrow{PX} \in U_1 \right\} \subset \mathbb{A}^n$ und $\mathbb{B}_2 = \left\{ X \in \mathbb{A}^n : \overrightarrow{QX} \in U_2 \right\} \subset \mathbb{A}^n$ zwei affine Unterräume. Zeigen Sie:*

a) (2 Punkte) *Falls $\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2 \neq \emptyset$, dann gilt*

$$\dim[\mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2] + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim \mathbb{B}_1 + \dim \mathbb{B}_2.$$

b) (2 Punkte) *Falls $\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2 = \emptyset$, dann gilt*

$$\dim[\mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2] + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim \mathbb{B}_1 + \dim \mathbb{B}_2 + 1.$$

Aufgabe 4) ***(4 Punkte)*** *Es seien nicht-kolineare Punkte $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{A}^2$ gegeben. Wir betrachten das Dreieck mit den Eckpunkten A_1, A_2 und A_3. Es seien nun 3 von den Eckpunkten verschiedene Punkte $P_3 \in [\{A_1, A_2\}]$, $P_2 \in [\{A_1, A_3\}]$ und $P_1 \in [\{A_2, A_3\}]$ gewählt. Zeigen Sie: „Die drei Geraden $g_i := [\{A_i, P_i\}]$ (für $i = 1, 2, 3$) sind entweder parallel oder sie schneiden sich in einem Punkt“ genau dann wenn gilt $\tau(P_1, A_3, A_2) \cdot \tau(P_2, A_1, A_3) \cdot \tau(P_3, A_2, A_1) = -1$.*

Hinweis: Wählen Sie eine Basis, z.B. $\left\{ \overrightarrow{P_3A_1}, \overrightarrow{P_3A_3} \right\}$, und schreiben Sie die Geraden in Parameterdarstellung.